

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 86/76

DECEMBER

M. SLUIJTER

VERTAKKINGSTHEORIE VOOR VERGELIJKINGEN $f(x) = \lambda x$
MET STORINGSMETHODEN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
—AMSTERDAM—

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

Vertakkingstheorie voor vergelijkingen $f(x) = \lambda x$ met storingsmethoden

door

M. Sluijter

SAMENVATTING

Het bestaan van oplossingen van vergelijkingen $F(x, \lambda) = (L + \lambda A)x + K(x, x) + S(x) = 0$ wordt onderzocht met storingsmethoden. Enige opmerkingen worden gemaakt over het gedrag van oplossingen van $F(x, \lambda) + \delta Bx = 0$, waarbij $|\delta|$ een kleine parameter is.

TREFWOORDEN: *vertakkingstheorie, bifurcatietheorie*

VOORWOORD

Het volgende is een bewerking van mijn doctoraalscriptie die ik heb geschreven tijdens een assistentschap bij de afdeling toegepaste wiskunde van het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

De behandelde theorie is een uitbreiding van de vertakkingstheorie zoals die is behandeld in het colloquium niet-lineaire analyse (TEMME [17] & [18]) dat in 1974 en 1975 aan het Mathematisch Centrum werd gehouden, in het bijzonder van de theorie behandeld in TEMME [17], hoofdstuk IV.

Speciale dank ben ik verschuldigd aan mijn studiementor Prof. Dr. H.A. Lauwerier. Verder betuig ik mijn dank aan Drs. O. Diekmann voor zijn begeleiding en aan de overige medewerkers en assistenten van de afdeling toegepaste wiskunde.

INHOUDSOPGAVE

Hoofdstuk 1:	Inleiding	3
	1.1. problemen en methoden	3
	1.2. de storingsmethode	4
	1.3. korte beschrijving van de inhoud	5
2:	Definities en stellingen	6
	2.1. definities en voorbeelden	7
	2.2. noodzakelijke voorwaarde voor vertakkingspunten	13
	2.3. splitsing van $\mathbb{R}^n$	14
	2.4. stabiliteit	17
3:	Ontwikkelen in $\lambda - \lambda_0$	20
	3.1. veronderstellingen over F	20
	3.2. de storingsmethode	22
	3.3. stabiliteit	26
	3.4. het geval $\dim N(L + \lambda_0 A) = 2$	29
	3.5. stabiliteit	34
4:	Ontwikkelen in ε	34
	4.1. de storingsmethode	35
	4.2. enkele opmerkingen	39
	4.3. stabiliteit	40
5:	Gestoorde vergelijkingen	41
	5.1. inleiding	41
	5.2. voorbeelden	42
	5.3. het geval $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$	44
	5.4. het geval $\dim N(L + \lambda_0 A) = 2$	46
Literatuur		51

HOOFDSTUK 1: INLEIDING

1.1. PROBLEMEN EN METHODEN

Het feit dat het aantal oplossingen van een stelsel vergelijkingen die één of meer parameters bevatten kan wijzigen als de waarden van de parameters worden gewijzigd, speelt een belangrijke rol in toepassingen.

Het bekendste voorbeeld van zo'n toepassing is de ingeklemde staaf (zie bijv. STAKGOLD [16]). Verder is in veel toepassingen het vinden van de (stabiele) stationaire toestanden van een systeem beschreven door een differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda)$ van belang.

Men is daarom geïnteresseerd in de oplossingen van vergelijkingen $F(x, \lambda) = 0$. Hierbij is x gewoonlijk een element van een eindig- of oneindigdimensionale Banachruimte en λ een element uit $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

Het vinden van alle oplossingen van dergelijke vergelijkingen is doorgaans onmogelijk, maar dikwijls ook niet nodig. Welke oplossingen men kan en/of wil vinden hangt af van de fysische achtergrond van het model en van de gebruikte methode. Een mogelijke globale indeling van de gebruikte methoden is, deze te verdelen in de volgende groepen:

- (a) topologische,
- (b) algebraïsche,
- (c) storings- en
- (d) iteratietechnieken.

De topologische technieken zijn in de eerste plaats die welke gebruik maken van de theorie van de topologische graad van een afbeelding (zie bijv. KRASNOSELSKII [12]). Verder de theorie van Lyusternik-Schnirelmann (zie STAKGOLD [16]) voor literatuur), en differentiaaltopologische technieken geïnspireerd door de catastrofetheorie van R. Thom (zie bijv. CHOW e.a. [2] en [3]).

Als $x \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}^k$ dan kan het oplossen van $F(x, \lambda) = 0$ opgevat worden als een probleem uit de algebra. Dit probleem is niet in zijn algemeenheid opgelost, maar soms leveren de toepassingen waaruit het probleem voortkomt voldoende extra voorwaarden om het probleem oplosbaar te maken.

De storingsmethode wordt in het volgende behandeld. Er zij alvast opgemerkt dat met deze methode slechts een beperkte klasse van vergelijkingen

kan worden behandeld.

Dit laatste geldt ook voor iteratiemethoden. Vergelijkingen van een soortgelijke vorm als hier zullen worden behandeld, zijn in KELLER & LANGFORD [11], KEENER & KELLER [10] en KEENER [9] behandeld met iteratiemethoden. In zekere zin levert dit sterkere resultaten dan met storingsmethoden worden bereikt. Stabiliteit wordt door hen niet behandeld.

1.2. DE STORINGSMETHODE

Eén van de beperkingen van de storingsmethoden is dat we in het algemeen moeten eisen dat geldt $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Zeer gedeeltelijke resultaten zijn mogelijk als $\lambda \in \mathbb{R}^2$ (zie hoofdstuk 5). Verder moeten we eisen dat voor alle λ geldt $F(0, \lambda) = 0$.

We proberen nu oplossingen te vinden die van de 'triviale oplossing' $x = 0$ 'aftakken'. Een voorbeeld is de vergelijking $\lambda x - x^2 = 0$ met de triviale oplossing $x = 0$ en de 'tak' $x = \lambda$ die in het 'vertakkingspunt' $\lambda = 0$ aftakt.

De storingsmethode probeert oplossingen op zo'n tak te benaderen door x en λ in een nieuwe parameter ε te ontwikkelen. Deze benadering zal alleen betrouwbaar zijn voor kleine x . Hoe de tak er 'verder weg van' $x = 0$ uit ziet kan in specifieke gevallen met numerieke methoden worden onderzocht. De vraag naar het globale gedrag van takken voor het algemene geval is lastig; een resultaat in deze richting is gevonden door RABINOWITZ [14] ('takken kunnen niet opeens ophouden').

Voor oplossingen van $F = 0$ kan een stabiliteitsbegrip gedefinieerd worden. Hieraan is een fysische interpretatie te geven als $F = 0$ de vergelijking is voor de stationaire oplossingen van een differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda)$ die de toestand van een systeem beschrijft.

We zullen proberen in het volgende een antwoord te geven op de volgende vragen:

- door welke $(0, \lambda_0)$ gaat een tak?
- hoeveel takken gaan door $(0, \lambda_0)$ als λ_0 vertakkingspunt is?
- welke 'richting' hebben de takken (i.e. wat zijn de eerste termen in de ontwikkelingen van x en λ in ε)?

- wanneer zijn takken stabiel?

1.3. KORTE BESCHRIJVING VAN DE INHOUD

Als een punt $(0, \lambda_0)$ bestaat zodat iedere omgeving van $(0, \lambda_0)$ een niet-triviale oplossing van $F = 0$ bevat, noemen we λ_0 vertakkingspunt. Zoals uit de impliciete functiestelling (st.2.14) blijkt, is een noodzakelijke voorwaarde voor een vertakkingspunt dat in $(0, \lambda_0)$ $F_x(0, \lambda_0)$ singulier is. We nemen aan dat deze operator van de vorm $L + \lambda_0 A$ is en de genoemde voorwaarde is dan dus dat de lineaire operator $L + \lambda_0 A$ een niet-triviale nulruimte bezit.

De structuur van deze nulruimte N speelt een belangrijke rol. In het bijzonder is het belangrijk of de gehele x -ruimte de directe som is van N en het bereik R van $L + \lambda_0 A$. Als we aannemen dat dit het geval is dan kunnen we x en de vergelijking $F = 0$ splitsen in componenten in N en in R (§2.3). Dit is zeker mogelijk als $x \in \mathbb{R}^n$ en onder zekere voorwaarden ook als x element is van een Banachruimte. Het mogelijk zijn van deze splitsing is het enige punt waar de theorie voor eindigdimensionale ruimten verschilt van die voor oneindigdimensionale ruimten. We behandelen de theorie voor $x \in \mathbb{R}^n$.

Het kan bewezen worden dat als $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$ (en $\mathbb{R}^n = N \oplus R$) λ_0 zeker vertakkingspunt is, zonder aan F verdere voorwaarden op te leggen. Hier-voor is de theorie van de topologische graad van een afbeelding nodig. Om echter ook de richting van de tak te bepalen is meer informatie over F nodig: het niet-lineaire deel van de laagste orde moet gegeven zijn. We nemen aan dat dit het kwadratische deel is en kiezen een speciale vorm voor de λ -afhankelijkheid: we nemen aan dat

$$F(x, \lambda) = (L + \lambda A)x + K(x, x) + S(x),$$

met L en A lineair, K bilineair en $S(x) = O(|x|^3)$, $x \rightarrow 0$.

We zullen de theorie van de graad niet behandelen, maar wel bewijzen dat voor F van de hier beschreven vorm λ_0 inderdaad vertakkingspunt is als $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$ en $\mathbb{R}^n = N \oplus R$. Dit doen we door x en λ in een nieuwe parameter ϵ te ontwikkelen, de eerste termen in deze ontwikkelingen uit te rekenen

bestaan van de rest aan te tonen met de impliciete functiestelling (opm.4.3).

Om de structuur van de methode te laten zien zullen we eerst een tak zoeken door x in gehele positieve machten van $\lambda - \lambda_0$ te ontwikkelen (het zal duidelijk zijn dat dit niet altijd mogelijk is: bijv. $\lambda x - x^3 = 0$). Dit zullen we doen voor $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$ (§3.2) en voor $\dim N(L + \lambda_0 A) = 2$ (§3.4).

Daarna geven we voor $\dim N(L + \lambda_0 A) = p$ de methode om x en λ in ε te ontwikkelen. Deze methode leidt tot $p + 1$ kwadratische vergelijkingen in $p + 1$ onbekenden en dit stelsel zal voor $p > 2$ dikwijls moeilijk op te lossen zijn.

Hierna (hoofdstuk 5) richten we ons op gestoorde vergelijkingen, i.e. vergelijkingen van de vorm $G(x, \lambda, \delta) = 0$ die een kleine parameter δ bevatten en voor $\delta = 0$ de vorm $F(x, \lambda) = 0$ met $F(0, \lambda) = 0$ hebben. We stellen de vraag wat er op grond van kennis over vertakkingspunten en takken van $F = 0$ te zeggen valt over vertakkingspunten en takken van $G = 0$. We beschouwen het geval dat geldt $G(0, \lambda, \delta) = 0$. Dan bestaat ook voor $\delta \neq 0$ de triviale oplossing $x = 0$ en kunnen we onderzoeken wat er met vertakkingspunten λ_0 van $F = 0$ gebeurt als $\delta \neq 0$. Een andere mogelijkheid is juist aan te nemen dat $G(0, \lambda, \delta) \neq 0$ voor $\delta \neq 0$. In dat geval zijn iteratiemethoden een mogelijkheid.

We zullen laten zien dat storingsmethoden niet geschikt zijn om erg specifieke informatie over de oplossingen van $G = 0$ te vinden, zoals bijvoorbeeld over het optreden van secundaire vertakkingen. Als alternatief geven we een globale uitspraak over het verband tussen oplossingen van $F = 0$ en $G = 0$ (lemma 5.8).

HOOFDSTUK 2: DEFINITIES EN STELLINGEN

In dit hoofdstuk definiëren we begrippen als tak en vertakkingspunt en illustreren deze begrippen aan de hand van enkele voorbeelden. We vinden met de impliciete functiestelling een noodzakelijke voorwaarde voor vertakkingspunten. We bespreken een resultaat uit de lineaire algebra, namelijk een splitsing van $\mathbb{R}^n$ die de essentiële stap in de storingsmethode zal blijken te zijn. Tenslotte definiëren we een stabiliteitsbegrip voor oplossingen van $F(x, \lambda) = 0$.

Hoewel we in dit hoofdstuk afgezien van de eis (2.2) geen voorwaarden

aan F opleggen, krijgen de hier besproken stellingen en technieken pas zin als F een speciale vorm heeft.

2.1. DEFINITIES EN VOORBEELDEN

We beschouwen vergelijkingen van de vorm

$$(2.1) \quad F(x, \lambda) = 0$$

met $x \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Een oplossing van (2.1) is een paar (x, λ) dat aan (2.1) voldoet, maar we zullen ook wel spreken van een oplossing $x(\lambda)$.

In de vertakkingstheorie wordt er van uitgegaan dat voor iedere λ een oplossing $x(\lambda)$ van (2.1) bekend is. We nemen bovendien aan dat deze $x(\lambda)$ continu van λ afhangt en dan is het geen beperking aan te nemen dat $x(\lambda) = 0$ voor alle λ . We zullen in het volgende *altijd* aannemen dat het volgende geldt.

VERONDERSTELLING 2.1.

$$(2.2) \quad F(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$x = 0$ wordt de *triviale oplossing* genoemd. De verzameling $\{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ wordt de *stam* genoemd of ook wel de triviale oplossing (trivial, basic solution ; trunc).

We zullen in het volgende oplossingen van (2.1) zoeken die in een nader te definiëren zin 'vastzitten' aan de stam. Dit idee zullen we eerst illustreren met een aantal voorbeelden.

VOORBEELD 2.2.

$$\lambda x = 0.$$

Oplossingen zijn $x = 0$ voor alle λ en $x = a$, a willekeurig, voor $\lambda = 0$.

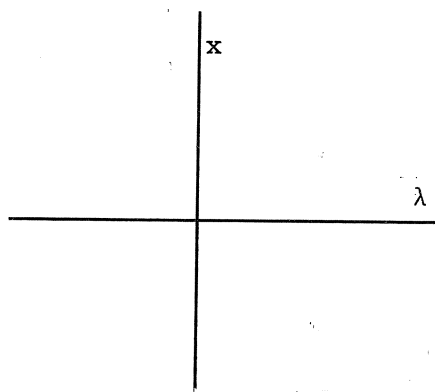


fig.1

VOORBEELD 2.3.

$$\lambda x - x^2 = 0.$$

Oplossingen zijn $x = 0$ en $x = \lambda$.

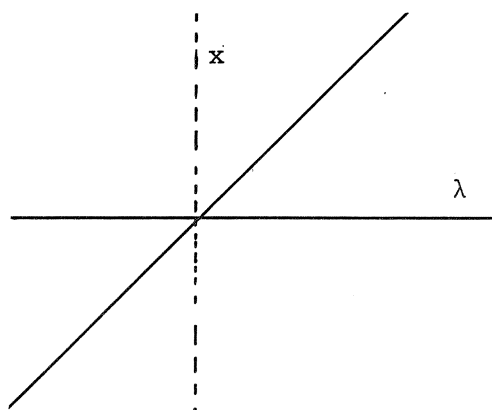


fig.2

VOORBEELD 2.4.

$$\lambda x - x^3 = 0.$$

Oplossingen zijn $x = 0$ voor alle λ en $x = +\sqrt{\lambda}$ en $x = -\sqrt{\lambda}$ voor niet-negatieve λ .

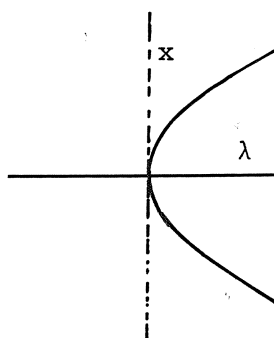


fig.3

VOORBEELD 2.5.

$$\lambda(-4x-2y) + x^2 + y^2 = 0$$

$$\lambda(-8x+6y) + x^2 - 3y^2 = 0.$$

Door de vergelijkingen te herschrijven als

$$(x-2\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = 5\lambda^2$$

$$(x-4\lambda)^2 - 3(y-\lambda)^2 = 13\lambda^2,$$

zien we direct dat de oplossingen zijn: $(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = (0,2\lambda)$.
Het ligt voor de hand λ tegen y uit te zetten.

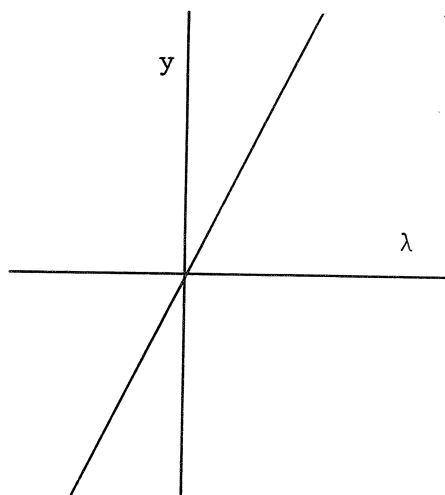


fig.4

VOORBEELD 2.6.

$$\lambda(-4x-2y) + x^2 + y^2 = 0$$

$$\lambda(-4x+6y) + x^2 - 3y^2 = 0.$$

De eerste vergelijking is dezelfde als in voorbeeld 2.5. De tweede kan herschreven worden als

$$(x-2\lambda)^2 - 3(y-\lambda)^2 = \lambda^2$$

en we zien dat de oplossingen zijn $(x,y) = (0,0)$, $(0,2\lambda)$, $(4\lambda,0)$ en $(4\lambda,2\lambda)$.

Als we deze oplossingen in een figuur willen tekenen, vallen oplossingen over elkaar als we λ tegen x of tegen y uitzetten. Een geschikte keuze is in dit geval λ tegen $x + y$ uit te zetten. In het vervolg zullen we dikwijls λ tegen een niet nader gespecificeerde $\phi(x)$ uitzetten. We nemen dan aan dat ϕ één of andere geschikte functie is van $x \in \mathbb{R}^n$ (geen norm; cf. vb. 2.4) die niet oplossingen in de figuur over elkaar laat vallen.

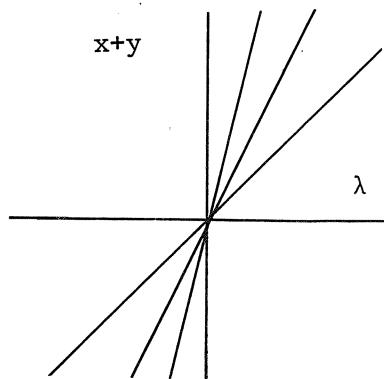


fig.5

VOORBEELD 2.7.

$$\lambda(-4x-2y) + x^2 + y^2 = 0$$

$$\lambda(4x+2y) + x^2 + y^2 = 0.$$

De eerste vergelijking is dezelfde als in voorbeeld 2.5. De tweede kan geschreven worden als

$$(x+2\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 = 5\lambda^2$$

en de enige oplossing is dus $(x,y) = (0,0)$.

VOORBEELD 2.8.(STAKGOLD [16])

$$(b_1 - \lambda)x + c_1 x(x^2 + y^2) = 0$$

$$(b_2 - \lambda)y + c_2 y(x^2 + y^2) = 0,$$

$b_2 > b_1 > 0$, $c_1 > c_2 > 0$. Oplossingen zijn $(x,y) = (0,0)$,
 $(\pm\sqrt{(\lambda-b_1)/c_1}, 0)$, $(0, \pm\sqrt{(\lambda-b_2)/c_2})$ en de oplossing gedefinieerd door

$$x^2 + y^2 = (b_2 - b_1) / (c_1 - c_2) > 0$$

$$\lambda = \lambda^* = (b_2 c_1 - b_1 c_2) / (c_1 - c_2) > b_2.$$

We tekenen in de (x,y,λ) - ruimte.

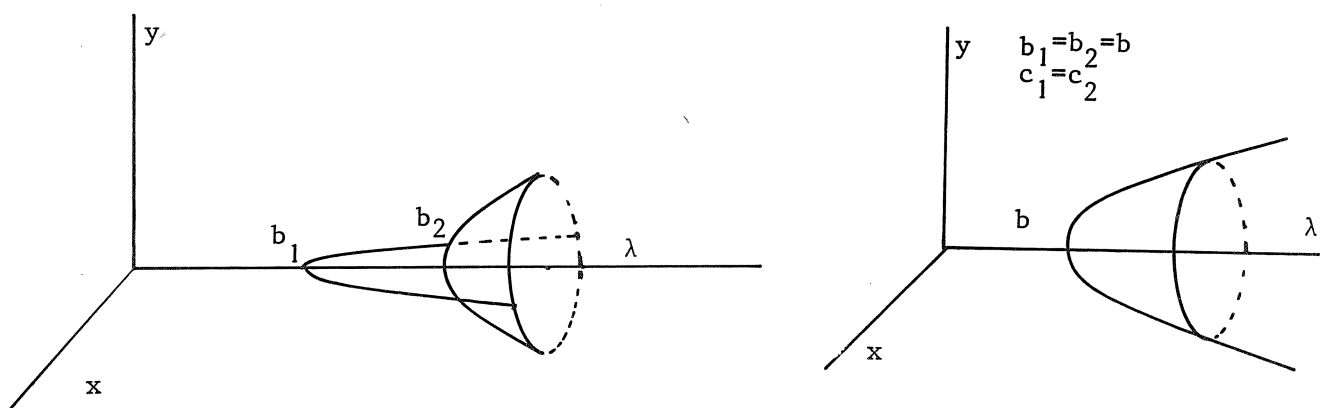


fig.6,7

(resp. twee primaire takken verbonden door een secundaire tak en een continuüm van takken).

De oplossingen in de vorige voorbeelden vormen lijnen in het (x, λ) - vlak, resp. de (x, y, λ) - ruimten, die elkaar snijden. We definiëren deze begrippen voor $x \in \mathbb{R}^n$.

DEFINITIE 2.9. Een *kromme* in $\mathbb{R}^n$ is een continue afbeelding γ^* van een begrens of onbegrens interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$. Het interval (α, β) heet het *parameterinterval* en we geven de grafiek van γ^* aan met $\gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

DEFINITIE 2.10. De grafiek $\gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ van een kromme γ^* heet een *lijn* (van oplossingen van $F = 0$) als iedere $(x, \lambda) \in \gamma$ oplossing is van (2.1).

DEFINITIE 2.11. Een lijn $\tau = \tau_{\lambda_0}$ heet een (*primaire*) *tak* als een λ_0 bestaat zodat $(0, \lambda_0) \in \tau$.

DEFINITIE 2.12. λ_0 heet een *bifurcatiepunt* of *vertakkingspunt* als iedere omgeving van $(0, \lambda_0)$ een niet-triviale oplossing van (2.1) bevat.

Een speciale tak is de stam; een tak τ_{λ_0} is een lijn die de stam in $(0, \lambda_0)$ snijdt en λ_0 is dan vertakkingspunt.

In de eerste zes voorbeelden zijn er takken door $x = 0$, $\lambda = 0$; $\lambda_0 = 0$ is vertakkingspunt. Voor meer algemene vergelijkingen zullen vertakkingspunten niet direct als zodanig te herkennen zijn en als λ_0 vertakkingspunt is, dan zal niet altijd zonder meer duidelijk zijn hoeveel takken door $(0, \lambda_0)$ gaan.

Als (α, β) het parameterinterval (def.2.9) is van een tak τ_0 door $(0, \lambda_0)$, dan bestaat een $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$ zodat $\tau_0^*(\alpha_0) = (0, \lambda_0)$. Soms worden de verzamelingen $\{\tau_0^*(a) : a \in (\alpha, \alpha_0)\}$ en $\{\tau_0^*(a) : a \in (\alpha_0, \beta)\}$ *halftakken* genoemd.

Een lijn die met een primaire tak een element (uit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) gemeen heeft noemen we een *secundaire tak*. Als secundaire takken bestaan, zijn deze niet eenduidig vastgelegd evenmin als de primaire takken in dat geval. Een tak kan dan op formele gronden zowel primaire als secundaire tak genoemd worden, maar in de praktijk geeft dit nauwelijks aanleiding tot verwarring.

VOORBEELD 2.13. (IOOSS [7]).

$$(1+\lambda)x - y + x^2 = 0$$

$$(1+\lambda)y - x + y^2 = 0.$$

Oplossingen zijn de triviale oplossing $(x,y) = (0,0)$, de primaire takken $(x,y) = (-\lambda, -\lambda)$ en $(x,y) = (-\frac{1}{2}(\lambda+2) \mp \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4}, -\frac{1}{2}(\lambda+2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4})$ voor $\lambda \leq -2$, en de secundaire tak $(x,y) = (-\frac{1}{2}(\lambda+2) \mp \sqrt{\lambda^2-4}, -\frac{1}{2}(\lambda+2) \pm \sqrt{\lambda^2-4})$ voor $\lambda \geq 2$. Maar het is ook mogelijk de in figuur 8 dubbel getrokken lijn als de primaire tak op te vatten.

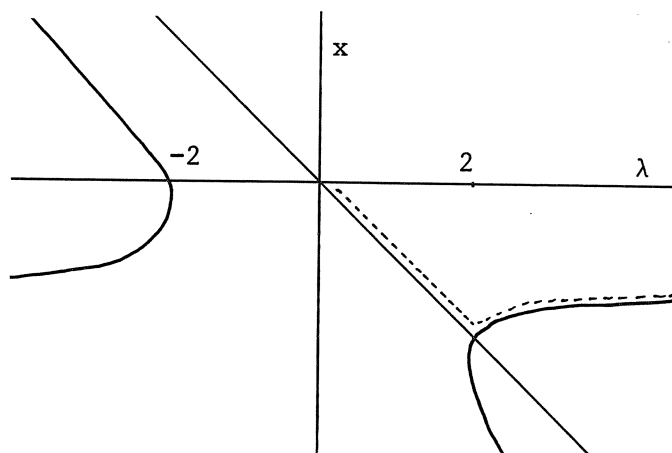


fig.8

2.2. NOODZAKELIJKE VOORWAARDE VOOR VERTAKKINGSPUNTEN

Als λ_0 vertakkingspunt is, dan bevat iedere omgeving van $(0, \lambda_0)$ meer dan één oplossing van $F = 0$. In $(0, \lambda_0)$ zal dus niet voldaan zijn aan de voorwaarde waaronder de impliciete functiestelling mag worden toegepast en zo vinden we een noodzakelijke voorwaarde voor vertakkingspunten.

STELLING 2.14. (Impliciete functiestelling).

Stel $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(a,b) = 0$, $F \in C^k(D)$, $k \geq 1$, waar D een open verzameling is die (a,b) bevat. Als

$$(2.3) \quad \det \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \Big|_{(a,b)} \neq 0,$$

dan bestaan omgevingen $U \subset \mathbb{R}^m$ van a en $V \subset \mathbb{R}^n$ van b , zodat voor iedere y in V de vergelijking $F(x, y) = 0$ een in U unieke oplossing bezit. Deze oplossing kan geschreven worden als $x = g(y)$ met $g \in C^k(V)$ en $g(b) = a$.

BEWIJS Dieudonné [4], §10.2. $\square$

GEVOLG 2.15.

Als λ_0 vertakkingspunt is, dan is in $a = 0$, $b = \lambda_0$ niet voldaan aan (2.3).

De voorwaarde in gevolg 2.15 is in het algemeen niet voldoende, zoals voorbeeld 2.7 laat zien. In één speciaal geval is de omkering van gevolg 2.15 wel waar en in veel literatuur wordt alleen dat speciale geval behandeld (zie opm. 4.3).

De vergelijking

$$F_x(0, \lambda)x = 0$$

wordt de (langs de nul-oplossing) gelineariseerde vergelijking genoemd.

Later zullen we aannemen dat $F_x(0, \lambda) = L + \lambda A$ en een noodzakelijke voorwaarde voor een vertakkingspunt λ_0 is dan dus dat de vergelijking

$$(L + \lambda_0 A)x = 0$$

een niet-triviale oplossing bezit. Het bereik en de nulruimte van $L + \lambda_0 A$ zullen een belangrijke rol spelen.

2.3. SPLITSING VAN $\mathbb{R}^n$

Zij $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in het volgende een lineaire afbeelding.

DEFINITIE 2.16.

$$R_m = R_m(T) = \{T^m x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

heet het bereik van T^m . Voor R_1 schrijven we R .

$$N_m = N_m(T) = \{x \mid T^m x = 0 \text{ \& } x \in \mathbb{R}^n\}$$

heet de nulruimte van T^m . Voor N_1 schrijven we N .

R_m en N_m zijn beide lineaire deelruimten van de eindig dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$. Deze deelruimten zijn niet altijd complementair : het is niet altijd mogelijk iedere $x \in \mathbb{R}^n$ te schrijven als $x = p + q$ met $p \in N_m$ en $q \in R_m$ en als dit wel mogelijk is, is deze schrijfwijze niet altijd uniek.

VOORBEELD 2.17. Zij T gedefinieerd door de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dan $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zodat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N$ en deze vector spant N op. Maar ook $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zodat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R$. Verder geldt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin R \cup N$. Merk op dat T^2 gegeven wordt door de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en dat de nulruimte van T^2 dus niet gelijk is aan de nulruimte van T .

LEMMA 2.18. *Er bestaat een m zodat $\mathbb{R}^n = N_m \oplus R_m$, i.e. iedere $x \in \mathbb{R}^n$ is uniek te schrijven als $x = p + q$ met $p \in N_m$ en $q \in R_m$.*

BEWIJS. HIRSCH & SMALE [6]: Er geldt:

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N = \bigcup_j N_j,$$

$$\mathbb{R}^n = R_0 \supset R_1 \supset \dots \supset R = \bigcap_j R_j.$$

Kies k en m zodat $N_j = N_k = N$ voor $j \geq k$ en $R_j = R_m = R$ voor $j \geq m$; dit is mogelijk omdat $\mathbb{R}^n$ eindig dimensionaal is. Nu geldt $\mathbb{R}^n = N \oplus R$. Immers $TR = R_{m+1} = R$ zodat $T|_R$ inverteerbaar is; ook is $T^k R = R$ en $T^k x \neq 0$ voor $x \in R \setminus \{0\}$. Omdat $T^k N = 0$ is $N \cap R = \{0\}$. Als $x \in \mathbb{R}^n$ dan $T^m x = y \in R$. Omdat $T^m|_R$ inverteerbaar is, is $T^m x = T^m z$ voor zekere $z \in R$. Schrijf $x = (x-z) + z$. $\square$

Neem even aan dat $m = 1$. Dan geldt $R = R$ en $N = N$. We zullen met P de projectie van $\mathbb{R}^n$ op N aangeven en met Q de projectie van $\mathbb{R}^n$ op R . Iedere $x \in \mathbb{R}^n$ is uniek te schrijven als $x = p + q$ met $p \in N$, $q \in R$ en er geldt $Px = p$, $Qx = q$.

Laten we nu de vergelijking

$$(2.4) \quad Tx = f(x)$$

beschouwen met $f = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. (2.4) is equivalent met het volgende tweetal:

$$(2.5a) \quad PTx = Pf(x),$$

$$(2.5b) \quad QTx = Qf(x).$$

Maar

$$PTx = PT(p+q) = PTq = 0,$$

$$QTx = QT(p+q) = QTq = Tq = TQx,$$

zodat (2.5) en dus ook (2.4) equivalent is aan

$$(2.6a) \quad Pf(p+q) = 0,$$

$$(2.6b) \quad Tq = Qf(p+q).$$

De equivalentie van (2.4) en (2.6a) + (2.6b) is een vorm van het Fredholm alternatief. We zullen dit later veelvuldig toepassen voor het geval $T = -(L + \lambda_0 A)$ en $f(x) = F(x, \lambda) - (L + \lambda_0 A)x$. We zullen dan dus wel eisen dat $m = 1$.

OPMERKING 2.19. Is $m > 1$, dat dient een zogenaamde *pseudoinverse* te worden ingevoerd (zie bijv. TEMME [17]).

Als $\dim N = p > 1$, dan kan (2.6a) worden opgevat als een stelsel van p vergelijkingen. Als N wordt opgespannen door $\phi_1, \dots, \phi_p$, dan bestaan daarbij $\phi_1^*, \dots, \phi_p^*$ in de duale ruimte zodat $Px = 0$ equivalent is aan de p vergelijkingen $\langle \phi_1^*, x \rangle = 0, \dots, \langle \phi_p^*, x \rangle = 0$. ϕ_i^* is dan de met ϕ_i geassocieerde rijvector en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is gedefinieerd door $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i$. Als $\dim N = 1$, zullen we dikwijls $\langle \phi_0^*, \cdot \rangle$ voor P schrijven. De ϕ_i zijn zó genormeerd, dat $\langle \phi_i^*, \phi_i \rangle = 1$.

Er is in het volgende geen bezwaar x op te vatten als element van een Banachruimte X . Onze enige taak is de resultaten uit deze paragraaf uit te

breiden naar Banachruimten. We nemen dan weer aan dat $T = -(L + \lambda_0 A)$ en $f(x) = F(x, \lambda) - (L + \lambda_0 A)x$. Laat nu $L + \lambda_0 A$ een Fredholm operator zijn (wat bijvoorbeeld het geval is als $L + \lambda_0 A$ compact is); d.w.z., als $\dim N(L + \lambda_0 A) = p$ en $X = N \oplus R$, dan bestaan ϕ_i^* , $i = 1, \dots, p$ zodat

- (i) $\langle \phi_i^*, (L + \lambda_0 A)\psi \rangle = 0$, $i = 1, \dots, p$, $\forall \psi \in R$
- (ii) $-(L + \lambda_0 A)x = f$ is oplosbaar dan en slechts dan als $\langle \phi_i^*, f \rangle = 0$, $i = 1, \dots, p$.

In dit geval is de in deze paragraaf beschreven splitsing toegestaan.

2.4. STABILITEIT

De vergelijking (2.1) kan worden opgevat als de vergelijking voor de stationaire toestanden van de differentiaalvergelijking

$$(2.7) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Een stationaire toestand kan al dan niet stabiel zijn; we zullen eerst de definitie van stabiliteit geven voor een stationaire oplossing van

$$(2.8) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

We nemen daarbij aan dat existentie en eenduidigheid van oplossingen gegarandeerd zijn. (Een voldoende voorwaarde hiervoor is dat f Lipschitz-continu is).

DEFINITIE 2.20. Zij gegeven de differentiaalvergelijking (2.8). Het punt x_0 heet een *stationaire oplossing* van (2.8) als $f(x_0) = 0$. Is x_0 een stationaire oplossing, dan wordt x_0 *stabiel* genoemd als geldt:

$$(2.9) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |v - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0| < \epsilon \quad \forall t > 0,$$

waar $x(t)$ de oplossing van (2.8) is met $x(0) = v$. Geldt bovendien:

$$(2.10) \quad \exists \delta > 0 : |v - x_0| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0| = 0,$$

dan heet x_0 *asymptotisch stabiel*. Is x_0 een stationaire oplossing waarvoor niet aan (2.9) is voldaan, dat heet x_0 *instabiel*.

VOORBEELD 2.21. Is $x \in \mathbb{R}^1$ en (2.8) lineair, dan is een eenvoudig stabiliteitscriterium te geven. De stationaire oplossing $x_0 = 0$ van $\frac{dx}{dt} = bx$ is stabiel als $b \leq 0$, asymptotisch stabiel als $b < 0$, instabiel als $b > 0$.

Het criterium dat in voorbeeld 2.21 werd gegeven kan enerzijds worden uitgebreid naar het geval $x \in \mathbb{R}^n$, anderzijds naar niet-lineaire vergelijkingen. De volgende stelling geldt.

STELLING 2.22. (Poincaré-Lyapounov). *Zij gegeven de differentiaalvergelijking*

$$(2.11) \quad \frac{dx}{dt} = Bx + r(x)$$

met $x \in \mathbb{R}^n$, B lineair, terwijl r voldoet aan

$$(2.12) \quad r(x) = o(|x|), \quad x \rightarrow 0,$$

waar $|x|$ de Euclidische norm van x is. Dan geldt dat de stationaire oplossing $\bar{x} \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$ van (2.11) *asymptotisch stabiel* is als alle eigenwaarden van B negatief reëel deel hebben; $\bar{x} = 0$ is *instabiel* als tenminste één der eigenwaarden van B positief reëel deel heeft.

BEWIJS. Uit HALE [5], Th.III.4.2. volgt dat $\bar{x} = 0$ een asymptotisch stabiele oplossing is van $\frac{dx}{dt} = Bx$ als alle eigenwaarden van B negatief reëel deel hebben en instabiel als tenminste één der eigenwaarden van B positief reëel deel heeft. Dat hetzelfde ook geldt wanneer $\bar{x} = 0$ wordt opgevat als oplossing van (2.11) wordt het principe van gelineariseerde stabiliteit genoemd en volgt uit HALE [5], Th.III, 2.4.

Merk op dat in het geval dat een aantal eigenwaarden van B imaginair is terwijl de overige negatief reëel deel hebben geen uitspraak wordt gedaan. De aard van r is dan essentieel.

Hetzelfde resultaat kan ook worden bewezen met Lyapounovfuncties: HALE [5], p.296. $\square$

Gebaseerd op definitie 2.20 en stelling 2.22 definiëren we formeel de stabiliteit van oplossingen van $F(x, \lambda) = 0$.

DEFINITIE 2.23. Het punt $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ heet een *stabiele* oplossing van $F(x, \lambda) = 0$ als alle eigenwaarden van de lineaire operator $F_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} \big|_{(\bar{x}, \bar{\lambda})}$ negatief reëel deel hebben, *instabiel* als tenminste één der eigenwaarden positief reëel deel heeft. Een halftak door $(0, \lambda_0)$ heet (in)stabil als willekeurig dicht bij $(0, \lambda_0)$ op de halftak (in)stabiele oplossingen liggen.

Zoals opgemerkt in § 2.3 zullen we later het geval beschouwen dat $F_x(0, \lambda) = L + \lambda A$. Dan kan de stabiliteit van de triviale oplossing alleen veranderen als λ een waarde λ_0 passeert waar $L + \lambda A$ singulier is, i.e. precies in dié λ_0 die mogelijkwerijs vertakkingspunten zijn (gevolg 2.15). Voor takken geldt ten dele hetzelfde: als een halftak instabiel wordt, i.e. de oplossingen op de halftak worden instabiel voorbij een zekere waarde $\underline{\lambda}$, dan is in zo'n punt voldaan aan de noodzakelijke voorwaarde voor een vertakkingspunt ($F_x(x(\underline{\lambda}), \underline{\lambda})$ singulier).

VOORBEELD 2.24. $\dot{x} = \lambda x - 2x^2 + x^3$: in onderstaande figuur zijn de stationaire oplossingen getekend en is aangegeven welke (in)stabil zijn.

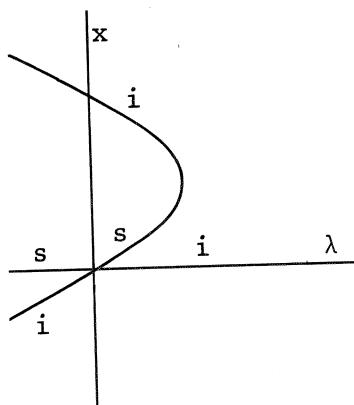


fig.9.

OPMERKING 2.25. Notaties.

We zullen in de volgende hoofdstukken vergelijkingen $F(x, \lambda) = 0$ beschouwen. We nemen daarbij steeds aan dat $x \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Met $|x|$ geven we de Euclidische norm van x aan.

Verder zullen we aannemen dat linearisatie mogelijk is en dat de gelineariseerde van F , de lineaire afbeelding

$$F_x(x, \lambda) = \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x},$$

niet de nul-afbeelding is. Aangezien $x \in \mathbb{R}^n$ is deze afbeelding voor vaste λ te interpreteren als een $n \times n$ - matrix werkend op elementen uit $\mathbb{R}^n$.

HOOFDSTUK 3: ONTWIKKELEN IN $\lambda - \lambda_0$

In dit hoofdstuk bespreken we uitgebreid een speciale toepassing van de storingsmethode. We onderzoeken het bestaan van takken die gekarakteriseerd kunnen worden door x in positieve gehele machten van $\lambda - \lambda_0$ te ontwikkelen.

Om het bestaan van zulke takken te bewijzen (stelling 3.4), moeten we strenge eisen aan F opleggen; sommige daarvan zullen we later afzwakken. Na stelling 3.4 behandelen we stabiliteit van (oplossingen op) takken. We besluiten het hoofdstuk met de behandeling van een geval waarbij we twee van de veronderstellingen (3.2 en 3.3) wijzigen; dit geval wordt behandeld in McLEOD & SATTINGER [13].

3.1. VERONDERSTELLINGEN

VERONDERSTELLING 3.1.

$$(3.1) \quad F(x, \lambda) = (L + \lambda A)x + K(x, x) + S(x),$$

L en A lineair, $A \neq 0$, K bilineair, $K \neq 0$, $S(x) = o(|x|^3)$, $x \rightarrow 0$

VERONDERSTELLING 3.2. Voor een zekere λ_0 is

$$(3.2a) \quad \dim N = 1,$$

$$(3.2b) \quad \mathbb{R}^n = N \oplus R \quad (N = N(L + \lambda_0 A)).$$

VERONDERSTELLING 3.3. Zij N opgespannen door ϕ_0 met duale ϕ_0^* . Dan geldt:

$$(3.3a) \quad \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle \neq 0,$$

$$(3.3b) \quad \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle \neq 0.$$

Wat betekenen deze veronderstellingen? Op grond van (3.1) bevat F een parameter λ , maar bevat deze parameter op een speciale wijze, namelijk alleen in de factor λAx (cf. opm. 3.7).

Verder is $F_x(0, \lambda) = L + \lambda A$. Wanneer bestaat een tak door $(0, \lambda_0)$? We hebben gezien (gevolg 2.15) dat dan tenminste moet gelden $\dim N(L + \lambda_0 A) > 0$. Voorlopig nemen we aan (in (3.2a)) dat $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$. Deze veronderstelling zullen we in §3.4 wijzigen.

Een essentieel bestanddeel van de door ons te volgen methode is de splitsing uit §2.3; (3.2b) maakt dit mogelijk.

Om te besluiten of λ_0 inderdaad vertakkingspunt is, is in het algemeen kennis van het niet-lineaire deel van F noodzakelijk. Het zal blijken dat kennis van het niet-lineaire deel van de laagste orde voldoende is; veronderstelling 3.1 stelt dat dit het 'kwadratische' deel van F is (cf. opm. 4.4).

Het eerste deel (3.3a) van veronderstelling 3.3 is essentieel; in veel literatuur wordt aangenomen dat $A = -I$, I de $n \times n$ eenheidsmatrix, waardoor aan deze voorwaarde is voldaan.

Het tweede deel (3.3b) van veronderstelling 3.3 blijkt noodzakelijk te zijn als we de tak willen karakteriseren door x in positieve gehele machten van $\lambda - \lambda_0$ te ontwikkelen (cf. opm. 3.9).

Tenslotte nog enkele opmerkingen over K . K is bilineair als K lineair is in beide argumenten. In de volgende paragrafen zal ook de Frechet-afgeleide van K een rol spelen. Dit is een lineaire operator M die in $x = a$ gedefinieerd is als

$$(3.4) \quad M(a, \cdot) : y \rightarrow K(a, y) + K(y, a),$$

zodat

$$(3.5) \quad M(x, y) = K(x, y) + K(y, x),$$

en

$$(3.6) \quad M(x, x) = 2K(x, x).$$

3.2. DE STORINGSMETHODE

In deze paragraaf worden zeer uitgebreid de technieken behandeld die in het volgende steeds terugkeren.

We nemen in deze en de volgende paragraaf aan dat aan veronderstelling- en 3.1, 3.2 en 3.3 is voldaan en zullen laten zien dat dan — voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein — een tak bestaat van de gedaante

$$(3.7) \quad x(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)$$

met $x_1 \neq 0$ en x_2 differentieerbaar in λ . Zo'n tak bestaat niet altijd, zoals blijkt uit voorbeelden 2.2, 2.4, 2.7 en 2.8. De vector x_1 bepaalt de *richting* (*initial shape*) van de tak; we zullen zien dat kennis van x_1 voldoende is om het stabiliteitskarakter van de tak te bepalen.

Om na te gaan of een tak van de vorm (3.7) inderdaad bestaat, vullen we (3.7) in (3.1) in, rekenen x_1 uit en bewijzen het bestaan van x_2 .

We herschrijven (3.1) als

$$(3.8) \quad -(L + \lambda_0 A)x = (\lambda - \lambda_0)Ax + K(x, x) + S(x),$$

(cf. (2.4)) en vullen nu (3.7) in. Dit levert

$$\begin{aligned} (3.9) \quad & -(L + \lambda_0 A) [(\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)] = \\ & = (\lambda - \lambda_0)A [(\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)] + \\ & + K((\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda), (\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)) + \\ & + (\lambda - \lambda_0)^3 S'(x(\lambda), \lambda). \end{aligned}$$

(Aangezien $S(x) = O(|x|^3)$, $x \rightarrow 0$, bestaat S' , begrensd voor $\lambda = \lambda_0$, zodat $S(x(\lambda)) = (\lambda - \lambda_0)^3 S'(x(\lambda), \lambda)$).

Delen we door $(\lambda - \lambda_0)$ en stellen we vervolgens $\lambda = \lambda_0$, dan vinden we:

$$(3.10) \quad -(L + \lambda_0 A)x_1 = 0$$

zodat $x_1 \in N$, i.e. $x_1 = a\phi_0$ met nader te bepalen a . We vullen $x_1 = a\phi_0$ in (3.9) in en delen door $(\lambda - \lambda_0)^2$. Dit levert de volgende vergelijking

$$(3.11) \quad -(L + \lambda_0 A)x_2(\lambda) = Aa\phi_0 + K(a\phi_0, a\phi_0) + (\lambda - \lambda_0) S''$$

met S'' begrensd in λ_0 ($S'' = S' + Ax_2(\lambda) + M(a\phi_0, x_2(\lambda))$).

We lossen (3.11) eerst op voor $\lambda = \lambda_0$. Voor $\lambda = \lambda_0$ is (3.11):

$$(3.12) \quad -(L + \lambda_0 A)x_2(\lambda_0) = Aa\phi_0 + K(a\phi_0, a\phi_0).$$

Deze vergelijking is van dezelfde vorm als (2.4), zodat (3.12) volgens §2.3 equivalent is aan:

$$(3.13a) \quad P(Aa\phi_0 + K(a\phi_0, a\phi_0)) = a\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle + a^2 \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle = 0$$

$$(3.13b) \quad -(L + \lambda_0 A)Q x_2(\lambda_0) = Q[Aa\phi_0 + K(a\phi_0, a\phi_0)].$$

Eén oplossing is $a = 0$. De andere oplossing a_0 is (cf. veronderstelling 3.3):

$$(3.14) \quad a_0 = - \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle / \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle$$

Als we a_0 in (3.13b) invullen dan kunnen we $Qx_2(\lambda_0)$ bepalen. Deze is uniek aangezien $Qx_2(\lambda_0) \in R$ en we geven deze aan met x_{20} .

Als we alle termen in (3.11) naar het rechterlid brengen, krijgen we een vergelijking van het type $H(x_2, a, \lambda) = 0$. We hebben gezien dat het drietal (x_{20}, a_0, λ_0) aan deze vergelijking voldoet. We passen nu de impliciete functiestelling toe om te bewijzen dat voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein een $x_2(\lambda)$ en $a(\lambda)$ bestaan zodat $(x_2(\lambda), a(\lambda), \lambda)$ aan $H = 0$ voldoet en

$x_2(\lambda_0) = x_{20}$, $a(\lambda_0) = a_0$; bovendien $x_2(\lambda) \in R$. Er bestaat dan dus voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein een tak van de vorm

$$(3.15) \quad x(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)$$

met $x_2(\lambda) \in R$. Aangezien $a(\lambda)$ op grond van de impliciete functiestelling en (3.1) differentieerbaar is, kunnen we (3.15) herschrijven:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} x(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0) (a_0 + (\lambda - \lambda_0)a_1(\lambda))\phi_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda) = \\ &= (\lambda - \lambda_0) a_0 \phi_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 \bar{x}_2(\lambda) \end{aligned}$$

met $\bar{x}_2(\lambda) = a_1(\lambda)\phi_0 + x_2(\lambda)$. Dit is precies (3.7), zodat we dan klaar zijn.

Maar we moeten nog wel nagaan of de impliciete functiestelling mag worden toegepast. We schrijven de vergelijking $H = 0$ (cf. (3.11)) in de vorm:

$$(3.17) \quad (L + \lambda_0 A)x_2(\lambda) + aA\phi_0 + a^2 K(\phi_0, \phi_0) + (\lambda - \lambda_0)S'' = 0.$$

Nu is (3.17) weer equivalent met het volgende tweetal:

$$(3.18a) \quad a \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle + a^2 \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle + (\lambda - \lambda_0) \langle \phi_0^*, S'' \rangle = 0,$$

$$(3.18b) \quad (L + \lambda_0 A)Qx_2(\lambda) + Q\{aA\phi_0 + a^2 K(\phi_0, \phi_0) + (\lambda - \lambda_0)S''\} = 0.$$

laten we de linkerleden van (3.18) H_1 resp. H_2 noemen. Dan is (x_{20}, a_0, λ_0) een oplossing van $H_1 = 0$, $H_2 = 0$. Er bestaat voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein oplossing $(x_2(\lambda), a(\lambda), \lambda)$ als de lineaire operator

$$(3.19) \quad \left. \frac{\partial (H_1, H_2)}{\partial (a_1, x_2)} \right|_{a_0, x_{20}, \lambda_0}$$

inverteerbaar is. Deze operator wordt gegeven door de $n \times n$ matrix:

$$(3.20) \quad \begin{pmatrix} \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle + 2a_0 \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle & Q\{A\phi_0 + 2a_0 K(\phi_0, \phi_0)\} \\ 0 & (L + \lambda_0 A) \end{pmatrix}$$

werkend op elementen (p, q) met $p \in N$ en $q \in R$. $L + \lambda_0 A$ is hier opgevat als een inverteerbare $(n-1) \times (n-1)$ matrix werkend van R naar R en de matrix (3.20) is dus inverteerbaar dan en slechts dan als

$$(3.21) \quad \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle + 2a_0 \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle \neq 0.$$

Hieraan is inderdaad voldaan omdat het linkerlid volgens (3.14) gelijk is aan $-\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle$, ongelijk 0 volgens veronderstelling 3.3. We hebben gevonden:

STELLING 3.4. *Zij voldaan aan veronderstellingen 3.1, 3.2 en 3.3. Dan bestaat een tak door $(0, \lambda_0)$ en deze wordt gegeven door*

$$x(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) a_0 \phi_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)$$

met

$$a_0 = -\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle / \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle.$$

VOORBEELD 3.5. Beschouw opnieuw voorbeeld 2.3: $\lambda x - x^2 = 0$. Er geldt $\lambda_0 = 0$, $\phi_0 = 1$, $\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle = 1$, $\langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle = -1$, zodat er een tak moet zijn

$$x(\lambda) = \lambda \cdot 1 + \lambda^2 x_2(\lambda).$$

In dit geval is $x_2(\lambda) = 0$.

Merk op dat in voorbeeld 2.4 niet aan (3.3b) is voldaan.

VOORBEELD 3.6.

$$y + \lambda x - y^2 = 0$$

$$x + \lambda y - x^2 = 0.$$

Er geldt $L + \lambda A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zodat $\lambda_0 = \pm 1$. Beschouw $\lambda_0 = -1$. Dan bijvoorbeeld $\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi_0^* = \frac{1}{2}(1, 1)$. Nu volgt $\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle = 1$, $\langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle = -1$, zodat er een tak is:

$$x(\lambda) = (\lambda + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\lambda + 1)^2 x_2(\lambda).$$

Weer is $x_2(\lambda) = 0$.

OPMERKING 3.7. In het speciale geval dat $\lambda_0 = 0$, mag F ook factoren $\lambda^2 Bx$ e.d. bevatten. Men gaat gemakkelijk na dat dit niets uitmaakt voor het bepalen van x_1 .

OPMERKING 3.8. Met de theorie van de topologische graad van een afbeelding kan bewezen worden dat λ_0 in ieder geval vertakkingspunt is als $\dim N(L + \lambda_0 A)$ oneven is. Kennis van K is daarvoor niet essentieel. Om ook de richting van de tak te bepalen is kennis van K wel nodig (cf. opm. 4.3).

OPMERKING 3.9. Het eerste deel (3.3a) van veronderstelling 3.3 is gebruikelijk, maar het tweede deel (3.3b) niet. Wat betekent (3.3b)? Een interpretatie wordt gesuggereerd door de voorbeelden uit §2.1: uit de figuren is te zien dat de takken uit voorbeelden 2.2, 2.4 en 2.8 niet van de vorm (3.7) zijn, die uit de overige voorbeelden wel. In de genoemde voorbeelden is $\langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle = 0$ en het valt dus te vermoeden dat (3.3b) vertakking als in de figuren 1 en 3 ('verticale raaklijn') uitsluit.

Enigszins slordig geformuleerd kan men zeggen dat in deze figuren $a_0 = \pm \infty$ en dit is consistent met (3.14). We komen hier in opmerking 4.4 op terug.

3.3. STABILITEIT

We nemen aan (zoals gebruikelijk is) dat de triviale oplossing stabiel is voor $\lambda < \lambda_0$, instabiel voor $\lambda > \lambda_0$. Wat betekent dit?

De stabiliteit van de triviale oplossing wordt bepaald door de langs nul-oplossing gelineariseerde operator $F_x(0, \lambda) = L + \lambda A$. Als $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$ wordt het reële deel van één eigenwaarde positief als λ de waarde λ_0 passeert. Noem deze eigenwaarde μ en de bij μ behorende eigenvector χ . Deze moeten voldoen aan

$$(3.22) \quad (L + \lambda A)\chi = \mu\chi.$$

Laten we aanemen dat μ en χ in $\lambda - \lambda_0$ kunnen worden ontwikkeld,

i.e. $\mu = \mu_0 + (\lambda - \lambda_0)\mu_1(\lambda)$ en $\chi = \chi_0 + (\lambda - \lambda_0)\chi_1(\lambda)$. Aangezien we weten dat het reële deel van μ gelijk is aan 0 als $\lambda = \lambda_0$ en omdat L en A reëel verondersteld zijn, blijkt direct dat $\mu_0 = 0$ en $\mu_1 > 0$. Nu vullen we in en krijgen dan:

$$\begin{aligned} & (L + \lambda_0 A)(\chi_0 + (\lambda - \lambda_0)\chi_1(\lambda)) + (\lambda - \lambda_0)A(\chi_0 + (\lambda - \lambda_0)\chi_1(\lambda)) = \\ & = (\lambda - \lambda_0)\mu_1(\lambda)(\chi_0 + (\lambda - \lambda_0)\chi_1(\lambda)) \end{aligned}$$

zodat, door $\lambda = \lambda_0$ te stellen direct volgt $\chi_0 = \phi_0$, zoals ook te verwachten was. Vullen we dit in, delen we door $\lambda - \lambda_0$ en stellen we weer $\lambda = \lambda_0$, dan volgt:

$$(L + \lambda_0 A)\chi_1(\lambda_0) + A\phi_0 = \mu_1\phi_0,$$

zodat (via de projectie P , zie §2.3) tenminste moet gelden:

$$\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle = \mu_1 \langle \phi_0^*, \phi_0 \rangle = \mu_1.$$

Omdat $\mu_1 > 0$ is dus ook $\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle > 0$.

Laten we nu de stabiliteit van de tak uit stelling 3.4 onderzoeken. De langs de tak gelineariseerde operator is

$$(3.23) \quad L + \lambda A + M(\cdot, x(\lambda)) + R,$$

waar M als in (3.5) de afgeleide van K in $x(\lambda)$ is en $R = O((\lambda - \lambda_0)^2)$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Een eigenwaarde σ en eigenvector ψ van deze operator moeten voldoen aan

$$(3.24) \quad (L + \lambda A)\psi + M(\psi, x(\lambda)) + R(\lambda)\psi = \sigma\psi.$$

We bepalen σ en ψ weer door beide in $\lambda - \lambda_0$ te ontwikkelen: we stellen

$$(3.25a) \quad \sigma = \sigma_0 + (\lambda - \lambda_0)\sigma_1(\lambda),$$

$$(3.25b) \quad \psi = \psi_0 + (\lambda - \lambda_0)\psi_1(\lambda).$$

Merk nu op dat voor $\lambda = \lambda_0$ (3.24) gelijk is aan (3.22) zodat voor één van de eigenwaarden van (3.24) geldt $\sigma_0 = 0$ (in (3.25a)). Dan ook $\psi_0 = \phi_0$ en invullen levert:

$$\begin{aligned} & (L + \lambda_0 A)(\phi_0 + (\lambda - \lambda_0)\psi_1(\lambda)) + (\lambda - \lambda_0)A(\phi_0 + (\lambda - \lambda_0)\psi_1) + \\ & + M(\phi_0 + (\lambda - \lambda_0)\psi_1(\lambda), (\lambda - \lambda_0)a_0\phi_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)) + R\psi = \\ & = (\lambda - \lambda_0)\sigma_1\psi_0 + (\lambda - \lambda_0)^2\sigma_1(\lambda)\psi_1(\lambda). \end{aligned}$$

Als $\lambda = \lambda_0$, dan volgt weer $(L + \lambda_0 A)\phi_0 = 0$, delen door $\lambda - \lambda_0$ en opnieuw $\lambda = \lambda_0$ stellen levert

$$(L + \lambda_0 A)\psi_1 + A\phi_0 + M(\phi_0, a_0\phi_0) = \sigma_1\phi_0$$

zodat zeker moet gelden:

$$\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle + \langle \phi_0^*, M(\phi_0, a_0\phi_0) \rangle = \sigma_1 \langle \phi_0^*, \phi_0 \rangle = \sigma_1,$$

hetgeen met (3.13a) en $M(\phi_0, \phi_0) = 2K(\phi_0, \phi_0)$ betekent dat $\sigma_1 = -\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle < 0$.

Eén der eigenwaarden van (3.23) heeft dus positief reëel deel voor $\lambda > \lambda_0$ (en $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein), negatief teken voor $\lambda < \lambda_0$. Hoe zit het met de overige eigenwaarden? Het verschil tussen de eigenwaarden van (3.22) en (3.23) is $0(\lambda - \lambda_0)$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Aangezien alle eigenwaarden van $L + \lambda A$ behalve μ negatief reëel deel houden als λ de waarde λ_0 passeert geldt hetzelfde voor de eigenwaarden van (3.23). Kort gezegd: alleen de eigenwaarde van (3.22) waarvan het reële deel van teken verandert, is relevant voor het stabiliteitsonderzoek van de tak.

Wat hebben we nu bewezen? We nemen aan dat de tak in $(\lambda - \lambda_0)$ ontwikkeld kan worden en dat in de schrijfwijze

$$x = (\lambda - \lambda_0)x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_1(\lambda)$$

geldt dat $x_1 = a_0\phi_0 \neq 0$. Deze tak bestaat dan uit een halftak 'links van λ_0 ', die we de subkritieke (half)tak noemen en een halftak 'rechts van λ_0 ',

die we de superkritieke halftak noemen. (let wel, als $a_0 < 0$, dan krijgen we de subkritieke halftak voor $\lambda > \lambda_0$).

In deze termen kunnen we het resultaat van deze paragraaf als volgt formuleren:

STELLING 3.10. *Superkritieke takken zijn stabiel, subkritieke instabiel.*

OPMERKING 3.11. Stelling 3.10 is alleen bewezen voor het geval $\dim N(L+\lambda_0 A) = p = 1$. Als $p > 1$ is de uitspraak niet algemeen waar (cf. §3.5).

In stelling 3.10 wordt aangenomen dat de triviale oplossing stabiel is voor $\lambda < \lambda_0$ (en dus instabiel voor $\lambda > \lambda_0$).

OPMERKING 3.12. Om de analyse van deze paragraaf volledig te maken moeten we met de impliciete functiestelling nog het bestaan van $\sigma_1(\lambda)$ en $\psi_1(\lambda)$ aantonen (voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein). Dit volgt op analoge wijze als in §3.2.

3.4 HET GEVAL $\dim N(L+\lambda_0 A) = 2$

De methode uit §3.2 werd door McLEOD & SATTINGER [13] gebruikt voor het geval $\dim N(L+\lambda_0 A) = 2$. De behandeling van dit geval verloopt geheel analoog.

Laat voldaan zijn aan veronderstelling 3.1. We vervangen veronderstelling 3.2 nu door

VERONDERSTELLING 3.13. Voor zekere λ_0 is

- (a) $\dim N = 2$,
- (b) $\mathbb{R}^n = N \oplus R \quad (N = N(L+\lambda_0 A))$.

Ook veronderstelling 3.3 moet natuurlijk gewijzigd worden, maar het is nuttig deze wijziging nog even uit te stellen.

Laat N opgespannen worden door orthonormale ϕ_1 en ϕ_2 . Dan volgt nu uit (3.10) $x_1 = a\phi_1 + b\phi_2$ met nader te bepalen a en b . Vergelijking (3.11) wordt nu een vergelijking van het type $H(x_2, a, b, \lambda) = 0$

(vervang $a\phi_0$ door $a\phi_1 + b\phi_2$).

In plaats van (3.13) krijgen we nu:

$$(3.26a) \quad \langle \phi_1^*, A(a\phi_1 + b\phi_2) \rangle + \langle \phi_1^*, K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) \rangle = 0$$

$$(3.26b) \quad \langle \phi_2^*, A(a\phi_1 + b\phi_2) \rangle + \langle \phi_2^*, K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) \rangle = 0$$

$$(3.26c) \quad -(L + \lambda_0 A)Qx_2(\lambda_0) = Q(A(a\phi_1 + b\phi_2) + K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2))$$

De vergelijking (3.13a) is dus vervangen door (3.26a) + (3.26b), twee kwadratische vergelijkingen in a en b . Eén oplossing is $a = b = 0$. Er is nog één reële oplossing of er zijn er nog drie. Is (a_0, b_0) zo'n reële oplossing dan kan daarbij uit (3.26c) een in R unieke $Qx_2(\lambda_0) \in R$ worden gevonden; noem deze x_{20} .

Om het bestaan van een oplossing van $H = 0$ aan te tonen voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein, gebruiken we weer de impliciete functiestelling; De vergelijking $H = 0$ heeft de vorm (cf. (3.17))

$$(3.27) \quad (L + \lambda_0 A)x_2(\lambda) + A(a\phi_1 + b\phi_2) + K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) + (\lambda - \lambda_0)S'' = 0$$

met $S'' = 0(1)$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Deze vergelijking is weer van het type (2.4) en kan gesplitst worden in het volgende drietal:

$$(3.28a) \quad \langle \phi_1^*, A(a\phi_1 + b\phi_2) \rangle + \langle \phi_1^*, K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) \rangle + (\lambda - \lambda_0)\langle \phi_1^*, S'' \rangle = 0$$

$$(3.28b) \quad \langle \phi_2^*, A(a\phi_1 + b\phi_2) \rangle + \langle \phi_2^*, K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) \rangle + (\lambda - \lambda_0)\langle \phi_2^*, S'' \rangle = 0$$

$$(3.28c) \quad (L + \lambda_0 A)Qx_2(\lambda) + Q(A(a\phi_1 + b\phi_2) + K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) + (\lambda - \lambda_0)S'') = 0.$$

Voor de linkerleden van (3.28) schrijven we H_1 , H_2 en H_3 . Nu is $(x_{20}, a_0, b_0, \lambda_0)$ een oplossing van $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$. Er bestaat voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein een oplossing $(x_2(\lambda), a(\lambda), b(\lambda), \lambda)$ als de lineaire operator

$$(3.29) \quad \frac{\partial(H_1, H_2, H_3)}{\partial(a, b, x_2)} \Big|_{a_0, b_0, x_{20}, \lambda_0}$$

inverteerbaar is. Deze operator wordt gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(a, b)} \Big|_{a_0, b_0, \lambda_0} & Q(\dots) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\dots) \\ L + \lambda_0 A \end{pmatrix}$$

werkend op elementen (p_1, p_2, q) met $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{R}$. De matrix is inverteerbaar dan en slechts dan als het volgende geldt:

VERONDERSTELLING 3.14. De matrix $\frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(a, b)} \Big|_{a_0, b_0, \lambda_0}$ is niet singulier.

We hebben hiermee de volgende stelling gevonden:

STELLING 3.15. Zij voldaan aan veronderstellingen 3.1 en 3.13. Dan levert ieder van de één of drie reële niet-triviale oplossingen (a_0, b_0) van (3.26a) + (3.26b) een tak van de vorm

$$(3.30) \quad x(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) (a_0 \phi_1 + b_0 \phi_2) + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda),$$

mits in a_0, b_0 voldaan is aan veronderstelling 3.14.

Zijn er takken door $(0, \lambda_0)$ die niet van de vorm (3.30) zijn?

McLEOD & SATTINGER hebben bewezen dat de één of drie takken die uit (3.26a) + (3.26b) + veronderstelling 3.14 worden gevonden, de enige zijn als voldaan is aan de volgende veronderstelling:

VERONDERSTELLING 3.16. De matrix met coëfficiënten $\langle \phi_i^*, A \phi_j \rangle$ is niet singulier en de twee vergelijkingen in a en b gegeven door

$$(3.31a) \quad \langle \phi_1^*, K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) \rangle = 0$$

$$(3.31b) \quad \langle \phi_2^*, K(a\phi_1 + b\phi_2, a\phi_1 + b\phi_2) \rangle = 0$$

hebben geen factor gemeen (en i.h.b. zijn geen van beide linkerleden identiek 0).

We geven een schets van het bewijs van McLEOD & SATTINGER [13].

Als $\{(u, \lambda)\}$ een verzameling naar $(0, \lambda_0)$ naderende oplossingen is, schrijven we

$$u = \epsilon(a(\lambda)\phi_1 + b(\lambda)\phi_2 + \psi(\lambda)),$$

met $|u| = \varepsilon$ en $\psi(\lambda) \in \mathbb{R}$. Nu wordt nagegaan dat:

- (1) a, b en ψ blijven begrensd als $(u, \lambda) \rightarrow (0, \lambda_0)$,
- (2) $|\psi| \leq (|\lambda - \lambda_0|) + |\varepsilon|$ als $\lambda \rightarrow \lambda_0$ zodat $a^2 + b^2 \rightarrow 0$ onmogelijk is,
- (3) $(\lambda - \lambda_0)\varepsilon^{-1}$ begrensd blijft als $\lambda \rightarrow \lambda_0$,
- (4) $\varepsilon(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ begrensd blijft als $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (voor deze stap is veronderstelling 3.16 nodig), zodat $\lambda - \lambda_0$ en ε van dezelfde orde van grootte zijn (cf. opm.4.4).
- (5) Iedere oplossing (u, λ) moet voor $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein op één van de hierboven geconstrueerde takken liggen.

In het geval $\dim N = 2$ is veronderstelling 3.3 vervangen door de twee veronderstellingen 3.14 en 3.16. Veronderstelling 3.14 controleert welke van de oplossingen van (3.26a) + (3.26b) inderdaad een tak opleveren, veronderstelling 3.16 of er geen takken 'vergeten' worden. Merk op dat het analogon van (3.3a) alleen voor dit laatste nodig is. (3.3b) is het analogon van veronderstelling 3.14:

$$(3.14) \quad \left. \frac{\partial H}{\partial a} \right|_{a_0, \lambda_0} = \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle + 2a_0 \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle = \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle / a_0.$$

VOORBEELD 3.17.

$$\lambda y - x^2 = 0$$

$$\lambda x - y^2 = 0.$$

$L = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xx' & \\ & yy' \end{pmatrix}$, $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3.26a) + (3.26b) worden $b - a^2 = 0$ en $a - b^2 = 0$ met als enige niet-triviale oplossing $a = b = 1$. Deze oplossing voldoet aan veronderstelling 3.14.

Men moet zich wel realiseren dat de winst van deze methode pas goed merkbaar is als $x \in \mathbb{R}^n$ met $n > 2$. In dat geval zijn de vergelijkingen (3.26a) + (3.26b) een essentiële vereenvoudiging.

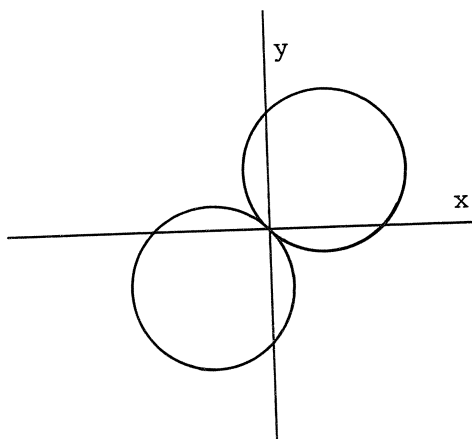
Andere voorbeelden zijn voorbeeld 2.5, 2.6 en 2.7 en verder de voorbeelden in §5.2. In voorbeeld 2.7 was er geen tak. Laten we nagaan of dat in overeenstemming is met het bovenstaande.

VOORBEELD 3.18. (= voorbeeld 2.7).

$$L = 0, A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, K\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xx' + yy' \end{pmatrix}, \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3.26a) + (3.26b) wordt: $-4a - 2b + a^2 + b^2 = 0$ & $4a + 2b + a^2 + b^2 = 0$ die geen niet-triviale oplossing hebben. We mogen echter niet besluiten dat er geen tak is aangezien niet aan veronderstelling 3.16 is voldaan.

Dit geeft de mogelijkheid de veronderstelling te interpreteren. Als we voor vaste λ de krommen uit voorbeeld 2.7 tekenen in het (x,y) -vlak vinden we de volgende figuur.



De krommen raken elkaar. Door λ te variëren komt hierin geen verandering: de krommen blijven raken.

Voor $\lambda = 0$ zijn beide krommen tot een punt gereduceerd. Het gaat er nu maar om of voor $\lambda \neq 0$ deze krommen elkaar raken of snijden. Als ze snijden is er een tak, als ze raken is er geen tak. Veronderstelling 3.16 garandeert dat de krommen elkaar snijden.

3.5. STABILITEIT

We hebben een tweedimensionaal analogon nodig van de redenering uit §3.3. De langs de tak gelineariseerde operator is weer

$$(3.32) \quad L + \lambda A + M(\cdot, x(\lambda)) + R(\lambda)$$

Met $R(\lambda) = O((\lambda - \lambda_0)^2)$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$. De twee relevante eigenwaarden zijn 0 als $\lambda = \lambda_0$, en de bijbehorende eigenvectoren zijn lineaire combinaties van ϕ_1 en ϕ_2 als $\lambda = \lambda_0$. We werken liever niet met dergelijke lineaire combinaties maar direct met ϕ_1 en ϕ_2 en definiëren daarom

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + (\lambda - \lambda_0) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

We beschouwen nu de volgende vergelijking in $\mathbb{R}^{2n}$ (of liever: in $\binom{p}{q}$ met $p \in \mathbb{R}^n$ en $q \in \mathbb{R}^n$):

$$(3.33) \quad \underline{L} + \lambda \underline{A} + \underline{M}(\cdot, x(\lambda)) + \underline{R}(\lambda)) \underline{\phi} = (\lambda - \lambda_0) B(\lambda) \underline{\phi}.$$

Als we de orde $\lambda - \lambda_0$ termen in deze vergelijking samennemen en de projecties $\langle \phi_1^*, \cdot \rangle$ en $\langle \phi_2^*, \cdot \rangle$ toepassen op de beide componenten (elementen uit $\mathbb{R}^n$), dan vinden we dat de coëfficiënten van de 2×2 matrix $B(\lambda)$ moeten voldoen aan

$$(3.34) \quad b_{ij}(\lambda_0) = \langle \phi_j^*, A\phi_i + M(\phi_i, x_1) \rangle, \quad i, j = 1, 2$$

waarbij $x_1 = a_0 \phi_1 + b_0 \phi_2$.

Noem de eigenwaarden van (3.32) $(\lambda - \lambda_0) \mu_1(\lambda)$ en $(\lambda - \lambda_0) \mu_2(\lambda)$. De bijbehorende eigenvectoren zijn niet noodzakelijk ϕ_1 en ϕ_2 aangevuld met een $\lambda - \lambda_0$ deel, maar wel lineaire combinaties daarvan. We verkrijgen deze door een orthogonale transformatie die de eigenwaarden van $B(\lambda_0)$ invariant laat. Deze eigenwaarden zijn daarom precies $\mu_1(\lambda_0)$ en $\mu_2(\lambda_0)$. De stabiliteit is dus bepaald door de eigenwaarden van $B(\lambda_0)$.

HOOFDSTUK 4: ONTWIKKELEN IN ε

Door x in $(\lambda - \lambda_0)$ te ontwikkelen worden niet alle takken gevonden. In dit hoofdstuk vinden we meer takken door x en λ in een nieuwe parameter ε te ontwikkelen; we werken toe naar stelling 4.2. Vervolgens bespreken we dit

resultaat en tot slot vermelden we hoe het stabiliteitsgedrag van (oplossingen op) takken in dit geval kan worden bepaald.

4.1. DE STORINGSMETHODE

Als we een tak in een hulpparameter ε ontwikkelen, proberen we de tak voor te stellen door

$$(4.1a) \quad x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon)$$

$$(4.1b) \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon).$$

Soms zullen we meer informatie over $x_2(\varepsilon)$ en $\lambda_1(\varepsilon)$ willen hebben. We kunnen dan bijvoorbeeld de tak voorstellen door

$$(4.2a) \quad x = \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^n x_n + \varepsilon^{n+1} x_{n+1}(\varepsilon)$$

$$(4.2b) \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots + \varepsilon^{n-1} \lambda_{n-1} + \varepsilon^n \lambda_n(\varepsilon).$$

In hoofdstuk 3 hebben we takken voorgesteld door x in $\lambda - \lambda_0$ te ontwikkelen. Wanneer is dit mogelijk? Dit is eenvoudig in te zien uit (4.2b): als $\lambda_1 \neq 0$ is ε als functie van $\lambda - \lambda_0$ op te lossen volgens de impliciete functiestelling. Daarna vullen we de gevonden ε in (4.2a) in. Er geldt dan:

$$x = (\lambda - \lambda_0) x_1 / \lambda_1 + O((\lambda - \lambda_0)^2), \quad \lambda \rightarrow \lambda_0.$$

We zullen nu onderzoeken wanneer een tak van de vorm (4.1) bestaat. Daartoe nemen we aan dat F voldoet aan veronderstelling 3.1, i.e.

$$(4.3) \quad F(x, \lambda) = (L + \lambda A)x + K(x, x) + S(x).$$

In plaats van veronderstelling 3.2 nemen we aan:

VERONDERSTELLING 4.1. Voor zekere λ_0 is

$$(4.4a) \quad \dim N = p,$$

$$(4.4b) \quad \mathbb{R}^n = N \oplus R \quad (N = N(L + \lambda_0 A)).$$

We vullen (4.1) in (4.3) in (en herschrijven; cf. (3.8)):

$$(4.5) \quad -(L + \lambda_0 A)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon)) = \varepsilon \lambda_1(\varepsilon) A(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon)) + \\ + K(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon), \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon)) + S(x).$$

Stel nu $\varepsilon = 0$. Dit levert

$$(4.6) \quad -(L + \lambda_0 A)x_1 = 0,$$

zodat $x_1 = \sum_{k=1}^p a_k \phi_k$ met nader te bepalen a_k en $\{\phi_k\}$ een orthonormale basis voor N .

Vul (4.6) in (4.5) in, deel door ε en stel $\varepsilon = 0$, dan

$$(4.7) \quad -(L + \lambda_0 A)x_2(0) = \lambda_1(0)A\left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k\right) + K\left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k\right).$$

Hieruit volgt (cf. (3.12) en (3.13)) dat voldaan moet zijn aan de volgende p vergelijkingen:

$$(4.8) \quad \langle \phi_i^*, \lambda_1(0)A\left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k\right) \rangle + \langle \phi_i^*, K\left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k, \sum_{k=1}^p a_k \phi_k\right) \rangle = 0, \\ i = 1, \dots, p.$$

Dit zijn p vergelijkingen in de $p + 1$ onbekenden $a_1, \dots, a_p$ en $\lambda_1(0)$. In zekere zin hebben we hier genoeg aan: het gaat ons immers om de verhouding tussen $\lambda_1(0)$ en $\sum_{k=1}^p a_k \phi_k$ (welke verhouding gegeven wordt door ε). Deze verhouding kunnen we normeren en daarmee normeren we dan ook ε . We vullen het stelsel (4.8) bijvoorbeeld aan met

$$(4.9) \quad \left| \sum_{k=1}^p a_k \phi_k \right| = 1$$

(zodat $|x_1| = \varepsilon$). Een andere veelgebruikte normering is $|x| = \varepsilon$. Normeren door de eis $\lambda_1 = 1$ is minder geschikt: de interessante gevallen krijgen we juist voor $\lambda_1 = 0$ en die sluiten we dan uit.

We zullen hier een iets andere weg volgen. Als we een niet-triviale oplossing $\lambda_1(0)$, $a = (a_1, \dots, a_p)$ van (4.8) hebben, die dan nog van één van de parameters afhangt, zeg van a_i , dan normeren we door de eis

$$(4.10) \quad a_i = 1.$$

Na eventueel hernummeren kunnen we aannemen dat $i = 1$ in (4.10). We hebben dan een oplossing van (4.8) met $a_1 = 1$. Zij deze oplossing $a_{20}, \dots, a_{p0}, \lambda_{10}$. We gaan nu de impliciete functiestelling toepassen op de volgende vergelijking, die equivalent is aan (4.5):

$$(4.11) \quad (L + \lambda_0 A)x_2 = \lambda_1 A\left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k\right) + K\left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k, \sum_{k=1}^p a_k \phi_k\right) + \varepsilon S'',$$

met S'' begreemd voor $\varepsilon = 0$. Deze vergelijking splitsen we weer volgens de methode uit §2.3 en we vinden dan p vergelijkingen in $(a_1 \equiv 1) a_2, \dots, a_p, \lambda_1$ en een $(p+1)$ -ste vergelijking die ook nog x_2 bevat (deze laatste is een vergelijking in $R \subset \mathbb{R}^{n-p}$).

Nu is $a_1 = 1$, $a_{20}, \dots, a_{p0}, \lambda_{10}, x_2(0), \varepsilon = 0$ een oplossing. Voor $|\varepsilon|$ voldoende klein is er dan een oplossing $a_1 = 1$, $a_2(\varepsilon), \dots, a_p(\varepsilon)$, $\lambda_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \varepsilon$ als de volgende matrix inverteerbaar is:

$$(4.12) \quad \begin{pmatrix} L + \lambda_0 A & Q(\dots \phi_1 \dots) \dots \dots \dots Q(\dots \phi_p \dots) \\ 0 & \frac{\partial F_i(\lambda_1, a_2, \dots, a_p)}{\partial (\lambda_1, a_2, \dots, a_p)} \Big|_{\lambda_1(0), a_{20}, \dots, a_{p0}} \end{pmatrix}$$

Is deze matrix niet-singulier (waarvoor noodzakelijk en voldoende is dat de Jacobi-matrix rechtsonder niet-singulier is), dan bestaat voor $|\varepsilon|$ voldoende klein een oplossing van (4.7): $x_2(\varepsilon), a_1 = 1, a_2(\varepsilon), \dots, a_p(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon)$. Daarmee bestaat dan dus een tak van (4.3) van de vorm:

$$(4.13a) \quad x = \varepsilon(\phi_1 + \sum_{k=2}^P a_k(\varepsilon)\phi_k) + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon), \quad x_2(\varepsilon) \in R,$$

$$(4.13b) \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon).$$

Merk op dat de eis $a_1 = 1$ dus de normering

$$(4.14) \quad \langle \phi_1^*, x \rangle = \varepsilon$$

inhoudt. Als $p = 1$ is dit de gebruikelijke normering $|x_1| = \varepsilon$.

Hoe vinden we nu verdere coëfficiënten? Laten we x_2 en λ_1 bepalen. Daarvoor moeten we aannemen dat ook het trilineaire deel van F bekend is, zeg $F = (L + \lambda A)x + K(x, x) + T(x) + S$. We stellen nu $x_2 = x_2(0) + \sum_{k=1}^P b_k \phi_k$, waar $x_2(0)$ uit (4.7) + (4.8) is bepaald ($x_2(0) \in R$, maar de x_2 in (4.2a) zal in het algemeen geen element van R zijn). Dit vullen we in in de vergelijking waaraan de coëfficiënten van ε^3 moeten voldoen:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} -(L + \lambda_0 A)x_3(0) &= \lambda_2(0)A(\phi_1 + \sum_{k=2}^P a_k \phi_k) + \lambda_1 A(x_2(0) + \sum_{k=1}^P b_k \phi_k) + \\ &+ M(\phi_1 + \sum_{k=2}^P a_k \phi_k, x_2(0) + \sum_{k=1}^P b_k \phi_k) + T(\phi_1 + \sum_{k=2}^P a_k \phi_k). \end{aligned}$$

In deze vergelijking is $x_2(0)$ bekend uit (4.7), $a_2, \dots, a_p$ uit (4.8) evenals λ_1 , verder is $b_1 = 1$ volgens (4.14). We kunnen dus $b_2, \dots, b_p, \lambda_2(0)$ en $x_3(0)$ oplossen. We hoeven existentie van de oplossing niet meer te bewijzen, aangezien we het bestaan van $x_2(\varepsilon)$ en $\lambda_1(\varepsilon)$ hebben aangetoond met de impliciete functiestelling, waaruit ook differentieerbaarheid van $x_2(\varepsilon)$ en $\lambda_1(\varepsilon)$ volgt (mits F voldoende glad is).

We vatten samen:

STELLING 4.2. Laat F voldoen aan veronderstelling 3.1 en λ_0 voldoen aan veronderstelling 4.1. Iedere oplossing van (4.8) + (4.14) zodanig dat (4.12) niet-singulier is, levert een tak van de vorm (4.13); $x_2(0)$ in (4.13a) voldoet aan (4.7).

4.2. ENIGE OPMERKINGEN

OPMERKING 4.3. ($p=1$).

In het geval $p = 1$ betekent (4.14) dat $a = 1$ en $\lambda_1(0)$ is volgens (4.8):

$$\lambda_1(0) = - \langle \phi_0^*, K(\phi_0, \phi_0) \rangle / \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle.$$

Als $\langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle \neq 0$ dan bestaat $\lambda_1(0)$ en ook is de Jacobi-matrix in (4.12) dan niet-singulier (want $= \langle \phi_0^*, A\phi_0 \rangle$), zodat dan *altijd een tak* bestaat

OPMERKING 4.4. Als bijvoorbeeld $\lambda_1(0) = 0$ en $x_1(0) \neq 0$, dan kan x niet in gehele positieve machten van $\lambda - \lambda_0$ worden ontwikkeld en heeft de tak in $(0, \lambda_0)$ een 'verticale raaklijn' (evenzo een 'horizontale raaklijn' als $\lambda_1(0) \neq 0$ en $x_1(0) = 0$).

OPMERKING 4.5. Als $\lambda_1(0) = 0$ zijn alle $\langle \phi_i^*, K(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k, \sum_{k=1}^p a_k \phi_k) \rangle$ gelijk aan 0. Een vereenvoudiging van de redenering van de vorige paragraaf is mogelijk als $K \equiv 0$. We beschouwen dan het trilineaire deel van F : zij $F(x, \lambda) = (L + \lambda A)x + T(x) + S(x)$, $S(x) = O(|x|^4)$, $x \rightarrow 0$. We vinden voor de coefficient van ε^3 :

$$-(L + \lambda_0 A)x_3(0) = \lambda_2(0)A \left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k \right) + T \left(\sum_{k=1}^p a_k \phi_k \right)$$

en de tak wordt gegeven door

$$x = \varepsilon \sum_{k=1}^p a_k \phi_k + \varepsilon^3 x_3(\varepsilon),$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2(\varepsilon).$$

OPMERKING 4.6. Het niet-singulier zijn van de Jacobi-matrix in (4.12) is enigszins te vergelijken met veronderstelling 3.16. Hier is echter niet een meetkundige interpretatie (zoals in voorbeeld 3.18) te geven.

Bijvoorbeeld voor $p = 2$ wordt deze matrix:

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1^*, A(\phi_1 + a_{20}\phi_2) \rangle & \langle \phi_1^*, \lambda_1 A\phi_2 \rangle + \langle \phi_1^*, 2a_{20}K(\phi_1, \phi_2) + M(\phi_1, \phi_2) \rangle \\ \langle \phi_2^*, A(\phi_1 + a_{20}\phi_2) \rangle & \langle \phi_2^*, \lambda_1 A\phi_2 \rangle + \langle \phi_2^*, 2a_{20}K(\phi_1, \phi_2) + M(\phi_1, \phi_2) \rangle \end{pmatrix}$$

Herschrijven door gebruik te maken van (4.8) levert geen vereenvoudiging.

OPMERKING 4.7. Zoals reeds eerder werd opgemerkt kunnen we niets zeggen over het gedrag van takken 'verder weg van' de triviale oplossing. Eén van de (weinige) resultaten in deze richting is de volgende stelling:

STELLING. (RABINOWITZ [14])

Als $\dim N(L + \lambda_0 A) = \dim N_2(L + \lambda_0 A) = k$ oneven is, dan is er een maximaal continuüm van oplossingen Λ_0 , dat niet-triviale oplossingen bevat, zodanig dat $(0, \lambda_0) \in \Lambda_0$ en óf Λ_0 bevat oplossingen van willekeurig grote norm in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, of Λ_0 bevat een oplossing $(0, \lambda_1)$ met $\dim N(L + \lambda_1 A) > 0$

4.3. STABILITEIT

Deze paragraaf is een directe generalisatie van §3.5. De langs de tak gelineariseerde operator is

$$L + \lambda(\epsilon)A + M(\cdot, x(\epsilon)).$$

Op analoge wijze als in §3.5 volgt dat de stabiliteit bepaald wordt door de eigenwaarden van de matrix $B(0)$ met coëfficiënten

$$b_{ij}(0) = \lambda_1(0) \langle \phi_i^*, A\phi_j \rangle + M(\phi_j, x_1(0)), \quad i, j, \dots, p.$$

Als de reële delen van de eigenwaarden van $B(0)$ alle negatief zijn, dan is de tak stabiel voor $\epsilon > 0$, instabiel voor $\epsilon < 0$.

Is $\lambda_1(0) = 0$, dan heeft de tak de gedaante uit een der hieronder getekende figuren. De eigenwaarden van de gelineariseerde operator hebben dan de vorm $\mu_i = \epsilon^2 \mu_i(\epsilon)$ (als tenminste $\lambda_2(0) \neq 0$) zodat het stabiliteitskarakter van de beide halftakken in beide figuren hetzelfde is. In het bijzonder blijft voor $p = 1$ stelling 3.10 doorgaan.

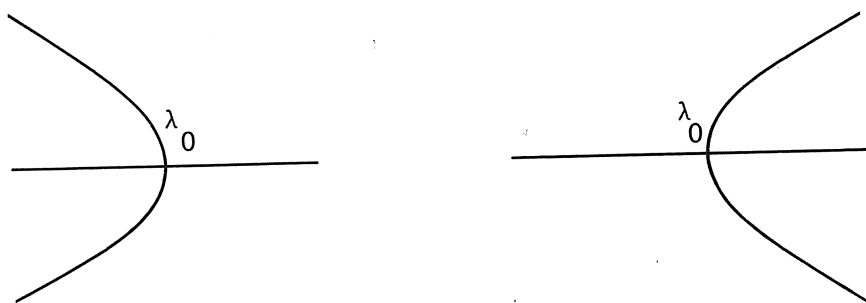


fig.10

HOOFDSTUK 5: GESTOORDE VERGELIJKINGEN

We vinden in dit hoofdstuk enkele resultaten over het gedrag van de oplossingen van vergelijkingen van het type $G(x, \lambda, \delta) = 0$, waar δ een kleine parameter is. Het optreden van secundaire vertakking wordt in voorbeelden geïllustreerd.

5.1. INLEIDING

In de vorige hoofdstukken hebben we ons bezig gehouden met de vraag hoe het aantal oplossingen en de aard van een oplossing x van $F(x, \lambda) = 0$ afhangen van λ . Nu bevatten fysische systemen dikwijls meer dan één parameter. We kunnen dus de vraag stellen hoe de voorgaande theorie uitgebreid kan worden naar het geval $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

Storingsmethoden zijn daarvoor niet erg geschikt. Dikwijls worden voor dit geval differentiaaltopologische technieken gebruikt (cf. CHOW [2],[3]). Er is één speciaal geval dat dikwijls wel met storingsmethoden wordt behandeld, namelijk het geval dat de vergelijking de gedaante $G(x, \lambda, \delta) = 0$ heeft, waar δ een kleine parameter is en λ eenzelfde rol vervult als in de vorige hoofdstukken. We zullen dit geval nader beschouwen. Zo'n kleine parameter δ beschrijft bijvoorbeeld een kleine storende invloed

in het fysisch systeem (bijvoorbeeld de invloed van de zwaartekracht bij de ingeklemde staaf). Dergelijke kleine invloeden worden dikwijls in het model verwaarloosd en we zullen onderzoeken of dit is te rechtvaardigen.

Om een verband met het voorgaande te krijgen nemen we aan dat voor $\delta = 0$ de vergelijking van het type $F(x, \lambda) = 0$ is, met F als in veronderstelling 3.1. We nemen dus aan dat $G(x, \lambda, \delta) = F(x, \lambda) + \delta F_1(x, \lambda, \delta)$, zodat $G(0, \lambda, \delta) = 0$ voor $\delta \neq 0$. Het geval dat juist $G(0, \lambda, \delta) \neq 0$ als $\delta \neq 0$ is behandeld met iteratiemethoden in [9], [10], [11].

De keuze voor F_1 is nogal willekeurig: in onze interpretatie waar δF_1 de invloed van een storing is, zal de precieze vorm van die storing niet bekend zijn. Een niet onredelijke aanname lijkt te stellen $F_1 = Bx$ met B lineair. We schrijven dus

$$(5.1) \quad G = F + \delta Bx,$$

B lineair, F voldoende aan veronderstelling 3.1.

We zullen onderzoeken wat het verband is tussen oplossingen van $F = 0$ en $G = 0$. Als vereenvoudiging zullen we aannemen dat takken van $F = 0$ in $\lambda - \lambda_0$ kunnen worden ontwikkeld.

5.2. VOORBEELDEN

We zullen in deze paragraaf een aantal voorbeelden geven om de verschillende mogelijkheden te illustreren.

VOORBEELD 5.1.

$$(\lambda + \delta)x - xy = 0$$

$$2\delta x + (\lambda + \delta)y + x^2 - y^2 = 0.$$

Voor $\delta = 0$ is $\lambda = 0$ vertakkingspunt: $(x, y) = (0, 0)$ en $(0, \lambda)$ zijn oplossingen. Voor $\delta \neq 0$ is $\lambda = -\delta$ vertakkingspunt: $(x, y) = (0, 0)$, $(0, \lambda + \delta)$ en $(-2\delta, \lambda + \delta)$ zijn oplossingen. De oplossing $(x, y) = (-2\delta, \lambda + \delta)$ is een lijn maar geen tak: een zogenaamde *vrije lijn*. Zowel deze vrije lijn als de tak

naderen voor $\delta \rightarrow 0$ naar de tak van $F = 0$.

VOORBEELD 5.2.

$$(\lambda + \delta)x + \delta y + 2xy = 0$$

$$-\delta x + (\lambda - \delta)y + x^2 + y^2 = 0.$$

Voor $\delta = 0$ is $\lambda = 0$ vertakkingspunt en er zijn drie takken; de oplossingen zijn: $(x, y) = (0, 0)$, $(0, -\lambda)$, $(\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda)$, $(-\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda)$. Voor $\delta \neq 0$ is $\lambda = 0$ weer vertakkingspunt, maar er zijn nu twee takken. Oplossingen zijn: $(x, y) = (0, 0)$, $(\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda)$ en de twee oplossingen gedefinieerd door $(x, y) = (\frac{1}{4}(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 8\delta\lambda}), \frac{1}{4}(-3\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 8\delta\lambda}))$. Deze laatste uitdrukking definieert een tak en een vrije lijn. Zowel deze tak als deze vrije lijn naderen voor $\delta \rightarrow 0$ niet naar één tak van $F = 0$, maar naar twee halftakken van $F = 0$.

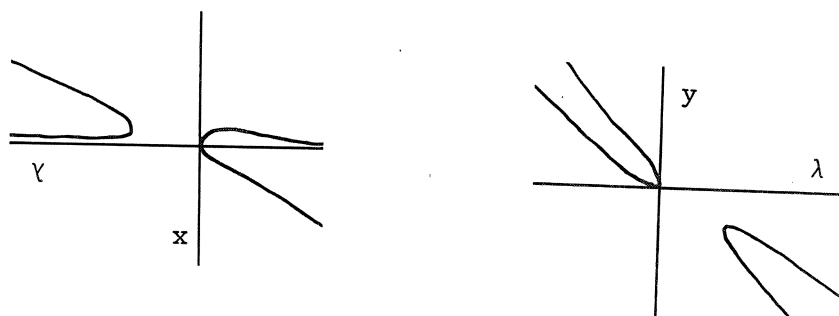


fig.11

VOORBEELD 5.3. (secundaire vertakking):

$$(\lambda + \delta)x + 2xy = 0$$

$$(\lambda - \delta)x + x^2 + y^2 = 0.$$

$\lambda = \delta$ en $\lambda = -\delta$ zijn vertakkingspunten. Oplossingen zijn: $(x, y) = (0, 0)$, $(0, \delta - \lambda)$ en de twee oplossingen gedefinieerd door

$(x,y) = (\pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda+\delta)(\lambda-3\delta)}, -\frac{1}{2}(\lambda+\delta))$. Vergelijk de takken voor $\delta = 0$ uit voorbeeld 5.2.

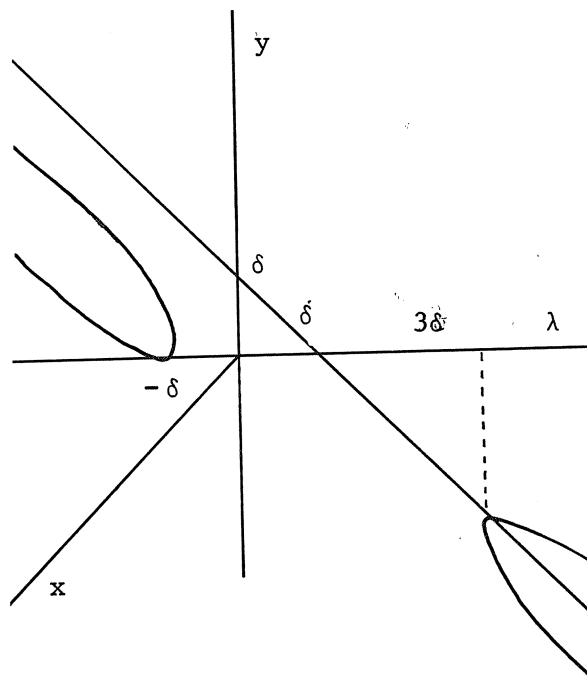


fig.12

VOORBEELD 5.4. (secundaire vertakking).

$$(\lambda+\delta)x + 2xy = 0$$

$$(\lambda-\delta)y + xy = 0.$$

Voor $\delta = 0$ drie takken; oplossingen zijn: $(x,y) = (0,0)$, $(-\lambda, -\frac{1}{2}\lambda)$, $\{x=0, \lambda=0\}$, $\{y=0, \lambda=0\}$. Voor $\delta \neq 0$ de takken $\{x=0, \lambda=+\delta\}$, $\{y=0, \lambda=-\delta\}$. De oplossing $(x,y) = (\delta-\lambda, -\frac{1}{2}(\lambda+\delta))$ is een secundaire tak die beide takken snijdt.

5.3. HET GEVAL $\dim N(L+\lambda_0 A) = 1$

We nemen aan dat G de volgende vorm heeft:

$$(5.2) \quad G(x, \lambda, \delta) = (L+\lambda A)x + K(x, x) + S(x) + \delta Bx,$$

met L , A en B lineair, K bilineair en $S(x) = 0$ ($|x|^3$), $x \rightarrow 0$. Nu is $G(x, \lambda, 0)$ gelijk aan de $F(x, \lambda)$ uit de vorige hoofdstukken.

Zij nu λ_0 zodanig dat $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$ en $\mathbb{R}^n = N \oplus R$. Dan is λ_0 vertakkingspunt van $F = 0$ en er gaat één tak door $(0, \lambda_0)$. We nemen aan dat deze tak in positieve gehele machten van $\lambda - \lambda_0$ kan worden ontwikkeld en dus gegeven wordt door een uitdrukking van de vorm:

$$x(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) a_0 \phi_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2(\lambda)$$

(cf. §3.2).

Nu bestaan voor $\delta \neq 0$ en $|\delta|$ voldoende klein een $\lambda(\delta)$ en $\phi(\delta)$ zodat

$$(5.3) \quad (L + \lambda(\delta)A + \delta B)\phi(\delta) = 0.$$

Immers, stel $\lambda(\delta) = \lambda_0 + \lambda_1(\delta)$, $\phi(\delta) = \phi_0 + \phi_1(\delta)$, vul in (5.3) in en het bestaan van $\lambda_1(\delta)$ en $\phi_1(\delta)$ volgt -voor $|\delta|$ voldoende klein- met de impliciete functiestelling. Verder geldt $\langle \phi^*(\delta), A\phi(\delta) \rangle \neq 0$ en $\langle \phi^*(\delta), K(\phi(\delta), \phi(\delta)) \rangle \neq 0$ voor $|\delta|$ voldoende klein. Dit betekent dat er voor $\delta \neq 0$ een tak van $G = 0$ bestaat van de vorm

$$(5.4) \quad x(\lambda, \delta) = (\lambda - \lambda(\delta))a(\delta)\phi(\delta) + (\lambda - \lambda(\delta))^2 x_2(\lambda, \delta).$$

Men ziet gemakkelijk in dat $a(\delta) = a_0 + \delta a_1(\delta)$ zodat (5.4) herschreven kan worden als

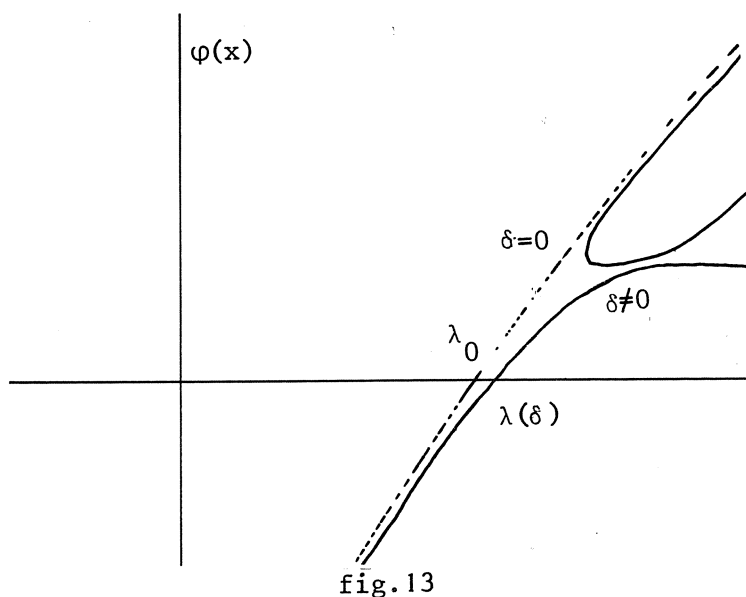
$$(5.5) \quad x(\lambda, \delta) = (\lambda - \lambda_0)a_0\phi_0 + \underline{x}_2(\lambda, \delta)$$

met $\underline{x}_2 = 0(|\delta| + (\lambda - \lambda_0)^2)$, $\delta \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

We kunnen dus zeggen dat met een tak van $F = 0$ in het geval $\dim N(L + \lambda_0 A) = 1$ een tak van $G = 0$ is te associëren die er weinig van verschilt, voor $|\delta|$ en $|\lambda - \lambda_0|$ voldoende klein.

OPMERKING 5.5. We kunnen niet zonder meer zeggen dat de tak van $G = 0$ door $(0, \lambda(\delta))$ in zijn geheel dichtbij de tak van $F = 0$ door $(0, \lambda_0)$ ligt.

Weliswaar is dit voor $|x|$ voldoende klein zeker het geval, maar een situatie als geschetst in de volgende figuur is mogelijk.



OPMERKING 5.6. Uit (5.5) volgt dat het stabiliteitsgedrag van de tak voor $\delta \neq 0$ hetzelfde is als voor $\delta = 0$ mits $|\delta|$ voldoende klein is.

5.4. HET GEVAL $\dim N(L+\lambda_0 A) = 2$

Het geval $\dim N(L+\lambda_0 A) = 2$ is veel ingewikkelder. Immers, dan zal niet altijd voor $\delta \neq 0$ weer een $\lambda(\delta)$ bestaan met $\dim N(L+\lambda(\delta)A+\delta B) = 2$ (we nemen weer aan dat G aan (5.2) voldoet). Dit hangt af van de matrix B (of liever: van de relatie tussen B en A). Welke situatie in specifieke gevallen optreedt is meestal gemakkelijk uit te rekenen. Een algemeen criterium is moeilijk te geven, maar een special geval wordt in het volgende lemma behandeld.

LEMMA 5.7. Zij $A = \pm I, I$ de identiteit. Laten ϕ_1 en ϕ_2 de ruimte $N(L+\lambda_0 A)$ opgespannen. Als

$$(5.6) \quad \langle \phi_1^*, B\phi_2 \rangle \langle \phi_2^*, B\phi_1 \rangle > 0,$$

dan bestaan voor $\delta \neq 0$ en $|\delta|$ voldoende klein twee $\lambda_i(\delta)$, $i = 1, 2$, met $\dim N(L+\lambda_i(\delta)A+\delta B) = 1$; de vectoren $\psi_i(\delta)$ die de ruimten $N(L+\lambda_i(\delta)A+\delta B)$

opspannen convergeren voor $\delta \rightarrow 0$ naar twee onafhankelijke vectoren in $N(L+\lambda_0 A)$.

BEWIJS. We proberen of een $\lambda(\delta)$ en $\psi(\delta)$ bestaan van de vorm

$\lambda(\delta) = \lambda_0 + \delta \lambda_1(\delta)$ en $\psi(\delta) = \psi_0 + \delta \psi_1(\delta)$. Invullen in $(L+\lambda(\delta)A+\delta B)\psi(\delta) = 0$ levert eerst $(L+\lambda_0 A)\psi_0 = 0$ zodat $\psi_0 = c\phi_1 + d\phi_2$ en vervolgens $(L+\lambda_0 A)\psi_1(0) + (\lambda_1(0)A+B)\psi_0 = 0$ zodat moet gelden (dit is de reden van de vereenvoudiging $A = \pm I$):

$$\pm \lambda_1 c + c \langle \phi_1^*, B\phi_1 \rangle + d \langle \phi_1^*, B\phi_2 \rangle = 0$$

$$\pm \lambda_1 d + c \langle \phi_2^*, B\phi_1 \rangle + d \langle \phi_2^*, B\phi_2 \rangle = 0.$$

Op grond van (5.6) is $c = 0$ onmogelijk, zodat we kunnen normeren door de eis $c = 1$. Dat betekent dat kennelijk geldt:

$$d = \frac{\pm \lambda_1 + \langle \phi_1^*, B\phi_1 \rangle}{-\langle \phi_1^*, B\phi_2 \rangle} = \frac{-\langle \phi_2^*, B\phi_1 \rangle}{\pm \lambda_1 + \langle \phi_2^*, B\phi_2 \rangle}$$

en er moet dus voldaan zijn aan:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1^*, B\phi_2 \rangle \langle \phi_2^*, B\phi_1 \rangle &= \lambda_1^2 \pm \lambda_1 (\langle \phi_1^*, B\phi_1 \rangle + \langle \phi_2^*, B\phi_2 \rangle) + \\ &+ \langle \phi_1^*, B\phi_1 \rangle \langle \phi_2^*, B\phi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Willen er twee verschillende reële λ_1 zijn, dan moet gelden dat de discriminant van deze vierkantsvergelijking in λ_1 positief is dus dat $(\langle \phi_1^*, B\phi_1 \rangle - \langle \phi_2^*, B\phi_2 \rangle)^2 + 4\langle \phi_1^*, B\phi_2 \rangle \langle \phi_2^*, B\phi_1 \rangle > 0$. Hieraan is zeker voldaan als

$$\langle \phi_1^*, B\phi_2 \rangle \langle \phi_2^*, B\phi_1 \rangle > 0. \quad \square$$

Laten we nu de verschillende gevallen apart beschouwen. Alle uitspraken gelden voor $|\delta|$ voldoende klein.

- (a) Voor $\delta \neq 0$ bestaat een $\lambda(\delta)$ met $\dim N(L+\lambda(\delta)A+\delta B) = 2$. Als voor $\delta = 0$ één resp. drie takken bestaan, geldt hetzelfde voor $\delta \neq 0$. Dit is eenvoudig in te zien door in (3.26a) en (3.26b) een term $B(a\phi_1+b\phi_2)$

toe te voegen en te laten zien dat bij iedere oplossing a_0, b_0 van (3.26a) + (3.26b) een oplossing $a(\delta), b(\delta)$ bestaat van deze vergelijking als de term $B(a\phi_1 + b\phi_2)$ is toegevoegd. Bovendien geldt $a(0) = a_0, b(0) = b_0$. Ook de stabiliteit van de (half) takken blijft onveranderd (ook weer omdat de eigenwaarden van $L + \lambda(\delta)A + \delta B$ en $L + \lambda_0 A$ orde $|\delta|$ van elkaar verschillen).

Conclusie: voor $\delta \neq 0$ dezelfde structuur als voor $\delta = 0$.

- (b) Voor $\delta \neq 0$ bestaan twee $\lambda_i(\delta)$, $i = 1, 2$, met $\dim N(L + \lambda_i(\delta)A + \delta B) = 1$. Beide $\lambda_i(\delta)$ zijn nu vertakkingspunten en door $(0, \lambda_i(\delta))$ gaat één tak. Voor het geval dat voor $\delta = 0$ door $(0, \lambda_0)$ één tak gaat zijn enige mogelijkheden voor het geval $\delta \neq 0$ in de volgende figuren geschetst.

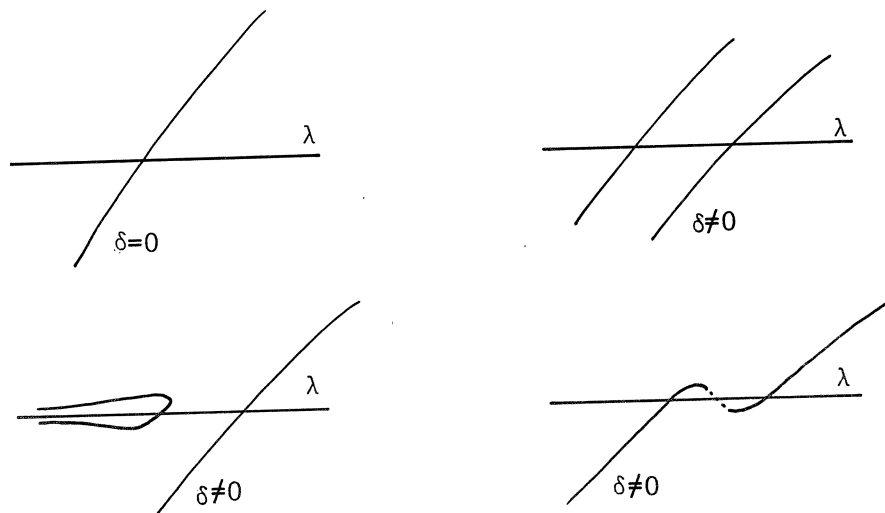


fig.14

Stel nu dat er voor $\delta = 0$ door $(0, \lambda_0)$ drie takken gaan. Voor $\delta \neq 0$ zijn er twee takken. Wat gebeurt met de derde tak als $\delta \neq 0$? In de voorbeelden in §5.2 hebben we gezien dat dit een secundaire tak kan zijn. Dat zo'n tak inderdaad een secundaire tak is wordt ook aangenomen in BAUER, KELLER & REISS [1]: zij bewijzen niet de *existentie* van de secundaire tak.

Een bewijs van het bestaan van secundaire takken wordt aangekondigd door KEENER in [8].

Met onze aanpak is het bestaan van secundaire takken niet te bewijzen. Daarvoor hebben we immers de exacte uitdrukking voor de langs de (primaire) tak gelineariseerde operator nodig en deze is slechts bij benadering te vinden.

Het is wel waar dat de oplossingen voor $\delta \neq 0$ 'dichtbij' de oplossingen voor $\delta = 0$ liggen; dit is de inhoud van het volgende lemma.

LEMMA 5.8. *Zij G zodanig dat G_x continu is in (x, λ, δ) . Zij gegeven een lijn van $G(x, \lambda, 0) = 0$ geparametriseerd door λ en zij $x(\lambda)$ continu in λ . Als voor zekere λ_1 en λ_2 geldt dat*

$$(5.7) \quad G_x \Big|_{x = x(\lambda), \delta = 0}$$

niet singulier is voor $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, dan bestaat voor $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ een lijn van $G(x, \lambda, \delta) = 0$ die continu is in δ voor $|\delta|$ voldoende klein.

BEWIJS. Als G_x continu is in (x, λ, δ) , dan zijn ook de eigenwaarden van G_x continu in (x, λ, δ) . Kies $\lambda' \in [\lambda_1, \lambda_2]$; om de oplossing $(x(\lambda'), \lambda', 0)$ van $G(x, \lambda, 0) = 0$ bestaat een bolletje (in $\mathbb{R}^{n+2}$) waarbinnen de eigenwaarden van $G_x(x, \lambda, \delta)$ ongelijk 0 zijn. Doe dit voor alle λ' in $[\lambda_1, \lambda_2]$. Er is nu een cylinder met straal δ_1 om de lijn $(x(\lambda), \lambda)$ van $G(x, \lambda, 0) = 0$ voor $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ die geheel binnen dergelijke bolletjes ligt (compact interval!). Dan is binnen deze cylinder $G_x(x, \lambda, \delta)$ niet singulier en kunnen we de impliciete functiestelling toepassen. Kies $\delta_0 \leq \delta_1$. Zij $x(\lambda', 0)$ oplossing van $G(x, \lambda', 0) = 0$. Daarbij bestaat een oplossing $x(\lambda', \delta_0)$ van $G(x, \lambda', \delta_0) = 0$. Voor λ'' voldoende dicht bij λ' , zeg $|\lambda' - \lambda''| < \varepsilon(\lambda', \delta_0)$ is er dan een oplossing $x(\lambda'', \delta_0)$ van $G(x, \lambda'', \delta_0) = 0$. Maar bij de oplossing $\underline{x}(\lambda'', 0)$ van $G(x, \lambda'', 0) = 0$ bestaat ook een oplossing $\underline{x}(\lambda'', \delta_0)$ van $G(x, \lambda'', \delta_0) = 0$. Deze is uniek aangezien $\delta_0 \leq \delta_1$ en we op de cylinder $\lambda' \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $|\delta_0| \leq \delta_1$ de impliciete functiestelling mogen toepassen. Er moet dus gelden $\underline{x}(\lambda'', \delta_0) = x(\lambda'', \delta_0)$.

Dit voltooit het bewijs. Immers voor alle $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ bestaat een oplossing van $G = 0$ voor $|\delta|$ voldoende klein. We hebben laten zien dat deze oplossingen 'aan elkaar vastzitten', i.e. op een lijn liggen. $\square$

Conclusie: met delen van lijnen van $F = 0$ zijn delen van lijnen van $G = 0$ te associëren.

Dit is in feite een globaal resultaat. Het is inderdaad waar dat de oplossingen van $F = 0$ weinig verschillen van de oplossingen van de gestoorde vergelijking $G = 0$, behalve in die punten waar (5.7) singulier wordt. Het is voor deze uitspraak ook niet meer noodzakelijk dat G voldoet aan (5.2).

Wat betekent het lemma als we het toepassen op de situatie dat voor $\delta \neq 0$ twee $\lambda_i(\delta)$ bestaan met $\dim N(L + \lambda_i(\delta)A + \delta B) = 1$? Er is een omgeving $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ van $(0, \lambda_0)$ waarbinnen we niet mogen aannemen dat (5.7) niet singulier is. Maar daaromheen bestaat een omgeving V zodat voor $(x, \lambda) \in V \setminus U$ het lemma kan worden toegepast. We krijgen de situatie uit de volgende figuur. Het is duidelijk dat ook het stabiliteitskarakter van de getekende delen van lijnen van $G = 0$ hetzelfde is als van de getekende delen van lijnen van $F = 0$.

Weliswaar weten we niet wat er binnen U gebeurt, in het bijzonder of daar secundaire vertakking optreedt; maar als we van die (toch wel erg locale) vraag afzien, weten we wat er gebeurt.

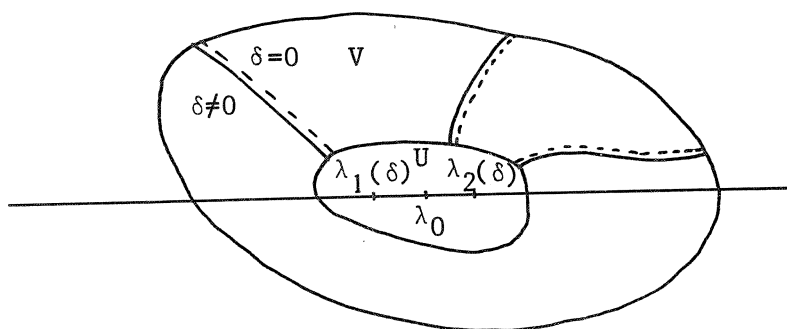


fig.15

Er zij opgemerkt dat het lemma ook in geval (a) kan worden toegepast. We zullen zien dat ook in het laatste geval (c) dat we bespreken het lemma een zinvol resultaat geeft.

- (c) Voor $\delta \neq 0$ heeft de operator $L + \lambda A + \delta B$ twee toegevoegd complexe eigenwaarden. Er bestaan $\lambda_1(\delta)$ waarvoor deze zuiver imaginair zijn. In dit geval treedt Hopf-bifurcatie op: er takt een periodieke oplossing van $\frac{dx}{dt} = G(x, \lambda, \delta)$ af van $(0, \lambda_1(\delta))$. Op grond van lemma 5.8 bestaat er echter ook een lijn van $G = 0$ als er voor $\delta = 0$ een tak van $F = 0$ bestaat. Conclusie: gewoonlijk gaat men er van uit dat in dit geval periodieke oplossingen ontstaan (als het model een dergelijke interpretatie toelaat). Er bestaan echter ook stationaire oplossingen van $\frac{dx}{dt} = G(x, \lambda, \delta)$ als er takken zijn van $F = 0$. Voor meer informatie over Hopf-bifurcatie zij verwezen naar TEMME [17] of SATTINGER [15] en de aldaar genoemde literatuur.

LITERATUUR

1. BAUER, L., H.B. KELLER & E.L. Reiss, *Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation*, SIAM Review, Vol. 17, no. 1, 1975.
2. CHOW, S. -N., J.K. HALE & J. MALLET-PARET, *Applications of generic bifurcation I*, Arch. Rat. Mech. Anal., no. 59, 1975.
3. CHOW, S. -N., J.K. HALE & J. MALLET-PARET, *ib. II*, Arch. Rat. Mech. Anal., no. 62, 1976.
4. DIEUDONNÉ, J., *Foundations of modern analysis*, Academic Press, 1969.
5. HALE, J., *Ordinary differential equations*, Wiley Interscience, 1969.
6. HIRSCH, M. & S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, 1974.
7. IOOSS, G., *Bifurcation et stabilité*, Publications Math. d'Orsay, no. 31, 1973.
8. KEENER, J.P., *Secondary bifurcation in nonlinear diffusion reaction equations*, St. Appl. Math. 55(3), 1976.
9. KEENER, J.P., *Perturbed bifurcation theory at multiple eigenvalues*, Arch. Rat. Mech. Anal., no. 56, 1974.
10. KEENER, J.P. & H.B. KELLER, *Perturbed bifurcation theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., no 50, 1973.

11. KELLER, H.B. & W.F. LANGFORD, *Iterations, perturbations and multiplicities for nonlinear bifurcation problems*, Arch, Rat. Mech. Anal., no. 48, 1972.
12. KRASNOSELSKII, M.A., *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon, 1964.
13. McLEOD, J.B. & D.H. SATTINGER, *Loss of stability and bifurcation at a double eigenvalue*, J. Funct. Anal., Vol. 14, 1973.
14. RABINOWITZ, P.H., *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal., Vol. 7, 1971.
15. SATTINGER, D.H., *Topics in stability and bifurcation theory*, Springer Lect. Notes in Math. no. 309, 1973.
16. STAKGOLD, I., *Branching of solutions of nonlinear equations*, SIAM Review, Vol. 13 (3), 1971.
17. TEMME, N.M. (ed.), *Nonlinear analysis*, Vol. I. MC syllabus 26.1, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1976.
18. TEMME, N.M. (ed.), *ib.* Vol. II, MC syllabus 26.2.